图　论

F.哈拉里　著
李尉萱　译

上海科学技术出版社

图　　论

F. 哈 拉 里 著

李 慰 萱 译

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32　印张 10　字数 260,000
1980年1月第1版　1981年3月第2次印刷
印数 10,001—20,000
书号：13119·785　定价：1.10元

序

> 当我是个十四岁的孩子时，我的父亲是如此愚昧无知，使我简直不能和他待在一起。但当我长到二十一岁时，我十分惊讶地发现，这位老人在七年内竟然学到了那末多的东西。
>
> ——马克·吐温

有好几方面的原因促进了人们对于图论的兴趣。现在，时常可以听到关于图论在物理学、化学、通讯科学、计算机技术、电气和土木工程、建筑学、运筹学、生物遗传学、心理学、社会学、经济学、人类学和语言学等学科的某些领域内都有应用的议论。这个理论也与数学本身的许多其他分支密切有关，这些分支包括群论、矩阵论、数值分析、概率论、拓扑学和组合学等。事实上，图论为任何一个包含了一种二元关系的系统提供了一个数学模型；部分地，也因为使用了图解式的表示法，图就具有一种直观的和符合美学的外形。在这个领域内，虽然有许多结果在本质上是初等的，但其中也有大量的十分错综复杂的问题可以难住最老练的数学家。

自从密歇根大学数学系在1956年开设图论和组合论的正规课程以来，本书的蓝本已经用过几次。我们发现，从教育学的观点来看，不将所有定理的证明都写进去是有好处的。比起其他方案来，这种办法可以将更多的定理写进去。从而，本书可以作为因袭"莫尔(Moore)方法"传统的一种教材，即让学生去证明那些只有叙述而不加以证明的定理来培养他们的数学能力。然而要注意，某些略去的内容是既困难又冗长的。掌握了本书内容的读者将适

于继而进行专题研究和将图论应用到其他领域中去。

我们尽力以合乎逻辑的次序来提出图论的各项论题，也尽力指出历史的背景，并且用图形来说明概念和结果以使得解释明晰。此外，还有三个附录提供了图、有向图和树的图解。本书的重点始终在于定理而不在于算法和应用，然而偶而也提到它们。

各道习题的水平有着极大的差别。困难且思路曲折的习题其序号用黑体数字标出，而特别困难的习题则再加*号。希望读者对每一个习题都加以考虑，以便熟悉包含在其中的材料。在读者没有研读过某一章的内容之前，它的许多"比较容易"的习题也许会成为非常困难的。

我们告诫读者不要陷入第二章和它的大量习题中去，只要这一章就可以给大学一年级或中学高年级的学生用作图论的一个初级简明教程。教师可以从本书中选取材料来作为一个学期的图论课程，而全书则够一年之用。后面的某几章适合于作为高级讨论班的课题。由于阅读本书的前提实在仅仅是不可捉摸的所谓"数学上的成熟"，所以本书既可以作为大学毕业班的教材也可以作为研究生的教材。熟悉一点初等群论和矩阵论对于学习最后四章将会有所帮助。

F. H.

1968 年 7 月

目　　录

我讨厌寻章摘句。你知道什么就说什么！

——R·W·爱默生

第一章 发 现!

我找到了!

——阿基米德

历史上,图论曾经被好多位数学家各自独立地建立过,因为图论本身就是应用数学的一部分*,所以这种情况并不是偶然的巧合。事实上,提到这个主题的文字记载最早是出现在欧拉(Euler)的著作中,虽然他所考虑的原始问题似乎是一个颇为无聊的难题,然而这个问题确实有其实际的背景。后来,克希霍夫(Kirchhoff)和凯莱(Cayley)在图论上的新发现也各自有其实际的根源。克希霍夫对于电网络的研究导致他发展了图论的基本概念和关于图中的树的定理;而凯莱则是为了计数有机化学中的同分异构物而考虑树。另外一个与图有关的难题是哈密顿(Hamilton)提出来的,它同样是促进了图论的发展。后来,著名的四色猜想出现了,并且至今一直作为一个解决不了的难题闻名于世。本世纪内,图论方面已经有了大量的新发现,在这个按年代排列的概论中我们只能作一个最简短的叙述。

1. 哥尼斯堡七桥问题

欧拉(1707~1782)在1736年解决了一个当时还没有解决的著名问题,称为*哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题*,从而使他成了图论和拓扑学的创始人。有七条桥将普莱格尔(Pregel)河中的两个

---

* 西勒维斯脱(Sylvester)较早就指出了图论的基本的组合属性和它具有广泛应用的一些理由,他说:"分歧(ramification)的理论是一种纯学院式的理论,因为它不管大小和位置;它使用几何的线,但是,这种线比起用在家系表上表明生育关系的线来没有更具体的意义。"

岛及岛与河岸联结起来，如图 1.1 所示。问题是要从这四块陆地中的任何一块开始，通过每一条桥正好一次，再回到起点。很容易通过试验摸索去尝试解决这个问题，然而，任何尝试都决不可能成功，因为欧拉得到的重要结果指出：在这种情形下是不可能有解的，见参考文献[E5]。

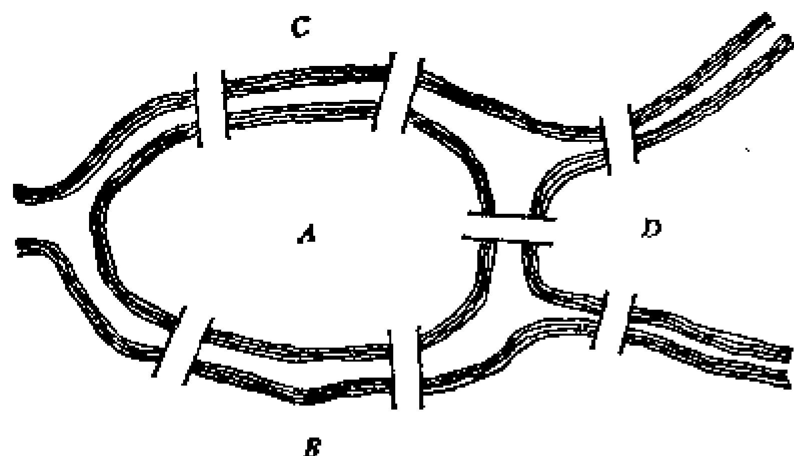


图 1.1 哥尼斯堡的一个公园(参看文献[E5])。

为了证明这个问题没有解，欧拉将每一块陆地用一个点来代替，将每一条桥用联结相应的两个点的一条线来代替，从而得到了一个“图”。这个图*见图 1.2，其中，各个点用与图 1.1 中的四块陆地相应的记号标出。证明这个问题没有解等价于证明图1.2中的图不能以某种方式走遍。

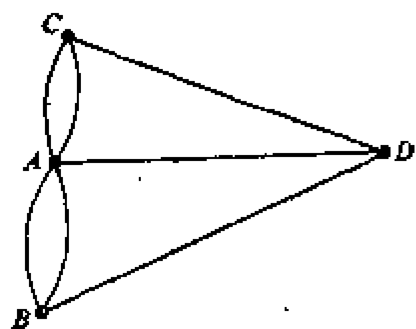


图 1.2 哥尼斯堡七桥问题的图。

欧拉并不限于处理这种特殊情形，他推广了这个问题，并且对于一个给定的图可以如此走遍给出了一个判定法则；就是说，这个图必须是连通的，并且每个点都与偶数条线相关联。图 1.2 中的图虽然是连通的，但并不是每个点都与偶数条线相关联。

2. 电网络

克希霍夫[K7]在 1847 年为了解一类线性联立方程组而发展

* 实际上，如我们将在第二章中见到，这是一个“多重图”。

了树的理论。这个线性方程组是描述一个电网络的每一条支路中和环绕每一个回路的电流的。他虽然是一个物理学家，但他象数学家那样地思考问题。他把一个电网络和其中的电阻、电容、电感等等抽象化了。他用一个只由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络而并不指明每条线所代表的电气元件的种类。这样一来，克希霍夫实际上是把每个电网络用它的基本图来代替。他还证明，为了解这个方程组，并不需要分别考虑一个电网络的图中的每个圈。与此相反，他用一个简单而有力的构造法指出，只要考虑一个图的任何一个"生成树"所决定的那些独立圈就够了。他的这个方法现在已成为一个标准的方法。图 1.3 中画出了一个设计好了的电网络 N、它的基本图 G 和一个生成树 T。

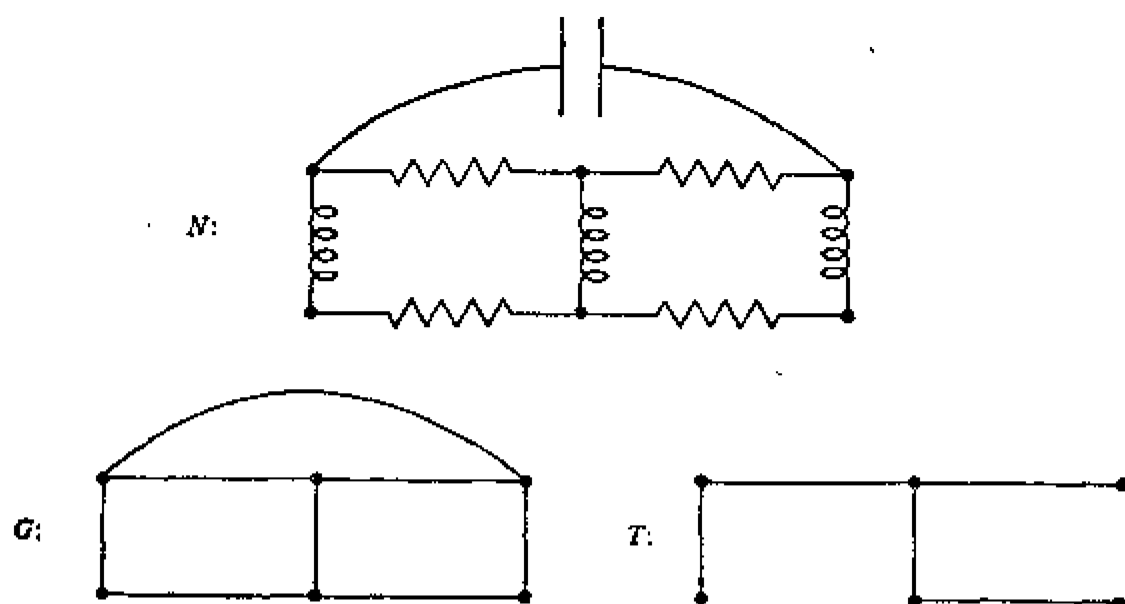


图 1.3 一个电网络 N，它的基本图 G 和它的一个生成树 T。

3. 化学同分异构物

1857 年，凯莱[C2]非常自然地在有机化学的领域里发现了一族重要的图，称为树。他从事于计数有给定的碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构物，如图 1.4 所示。

当然，凯莱抽象地重新叙述了这个问题：求有 p 个点的树的数目，其中每个点的度等于 1 或 4. 他没有能够立即成功地解决这个问题，所以他改换了这个问题，逐步计数了：有根树(其中有一个

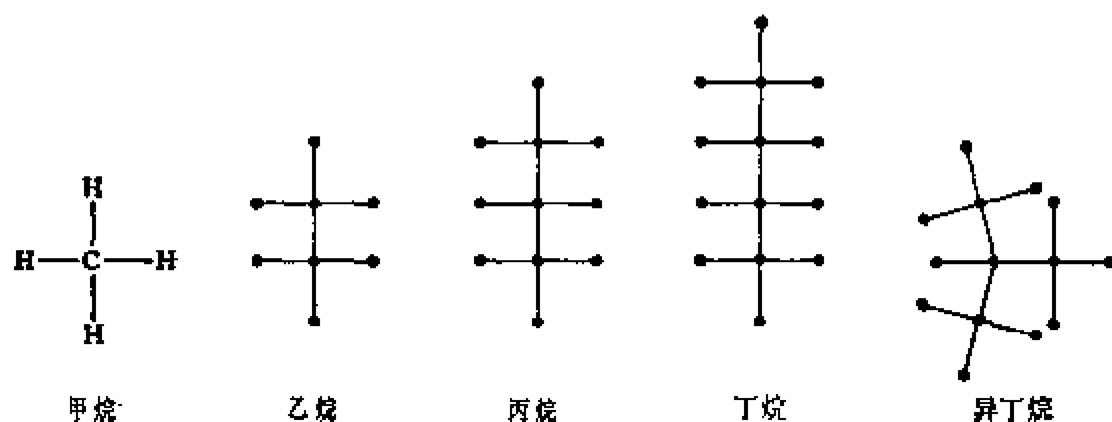


图 1.4 最小的饱和碳氢化合物。

点与其余各点有区别的树)、树、每个点的度至多等于 4 的树。最后，他还是数出了每个点的度等于 1 或 4 的树，从而解决了那个化学问题，见[C3]。后来，约当(Jordan)作为一个纯数学的对象独立地发现了树(1869)。西勒维斯脱写道(1882)：约当这样做"一点也没有察觉到它与现代的化学学说有关，"见[K10, p. 48]。

4. 绕行世界

威廉·哈密顿爵士在 1859 年发明了一种游戏*。这种游戏用一个规则的实心十二面体，它的二十个顶点标以有名的城市的名字，要求游戏者找一条沿着各边通过每个顶点正好一次的闭回路，即"绕行世界"。哈密顿以 25 个金币的代价把他的设计卖给了一个玩具商。然而，这是一笔滑头生意，因为这个游戏在经济上并不成功。

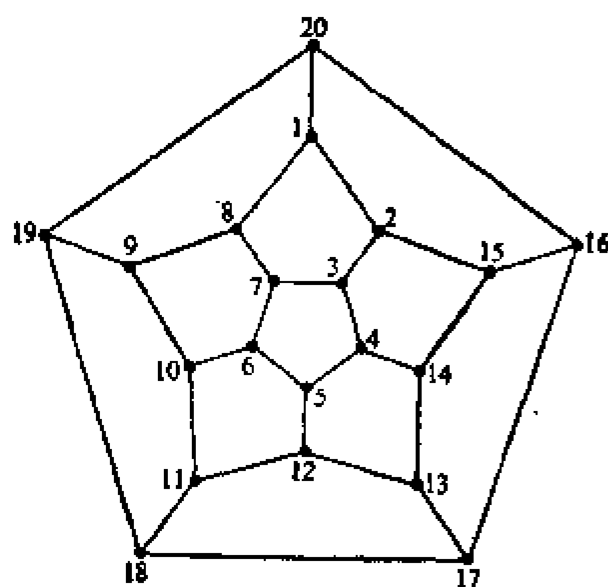


图 1.5 "绕行世界"。

用图的语言来说，游戏的目的是在十二面体的图中找一个生成圈。这个图画在图 1.5 中。图中的点记以 1, 2, …, 20 (而不写阿姆斯特坦，安亚

* 更完整的叙述见鲍尔(Ball)和考克斯特(Coxeter)[BC1, p. 262]。

柏，柏林，布达佩斯，都柏林，爱丁堡，耶路撒冷，伦敦，墨尔本，莫斯科，新西伯利亚，纽约，巴黎，北京，布拉格，里约热内卢，罗马，旧金山，东京和华沙），从而有一个生成圈就可以明显地看出来。

5. 四色猜想*

在图论中，也许是在全部数学中，最出名的没有解决的问题是著名的四色猜想。任何一个数学家可以在五分钟之内将这个非凡的问题向马路上的一个普通人讲清楚。在讲清楚以后，虽然两个人都懂得了这个问题，但是要解决它，可谁也无能为力。

下面这一段话引自梅(May)的总结性的历史文献[M5]，它叙述了四色猜想并且阐明了这个猜想所起的作用：

(这个猜想说)在一个平面或球面上的任何地图能够只用四种颜色来着色，使得没有两个相邻的国家有相同的颜色。每个国家必须由一个单连通域构成，而两个国家相邻是指它们有一段公共的边界线(而不仅仅只有一个公共点)。这个猜想在数学的一个称为组合拓扑学的分支中起了催化剂的作用。它也与当前流行的图论密切有关。半个多世纪以来，由许多(有人说是全部)数学家的工作，已对一些特殊情形作出了证明……。普遍的看法是：这个猜想是正确的，但是未必可以普遍地证明。看来，在一段时间内，它还是要作为一个最简单和最诱人的没有解决的数学问题而存在。

四色猜想有一段有趣的历史，但它的起源仍然有点模糊。有些报告说麦比乌斯(Möbius)在1840年就熟悉这个问题，但是，可以肯定的仅仅是这个问题约于1850年由格思里(Guthrie)转告给德·摩根(De Morgan)。1879年，肯普(Kempe)[K6]给出了这个猜想的许多个错误“证明”中的第一个“证明”。1890年，希伍德(Heawood)[H38]发现了它的一个错误。然而，希伍德指出，如果“四”换成“五”这个猜想就对了。最近，奥尔(Ore)和斯坦普尔

---

* 四色猜想已在1976年由美国的阿普尔(K. Appel)，黑肯(W. Hakan)和考齐(J. Koch)等三人依靠电子计算机的帮助作出了证明。可参考 G. B. Kolata, The Four-color Conjecture: A Computer-aided Proof, *Science*, **193**(1976,8), No. 4253.

——译注

(Stemple)[OS1]对于少于40个国家的所有地图证明了这个猜想，所以，假如一旦找到一个反例，它一定是极其庞大和复杂的。

每个地图可以导出一个图，其中国家(和外部区域)都是点，当相应的两个国家相邻时这两个点用一条线来联结，所以四色猜想是图论中的一个问题。由一个地图导出的图显然可以画在平面上而且没有相交的线。于是，如果可以将每一个可平面图的点用四种或更少的颜色来着色，使邻接的点有不同的颜色，四色猜想就证明了。

6. 二十世纪的图论

1936年，心理学家莱温(Lewin)[L2]提出，一个人的"生活空间"可以用一张平面地图来代表*。在这样一张地图中，各个区域代表一个人的各种活动，例如他的工作环境，他的家和他的嗜好。可以指出，莱温所处理的实际上是图，如在图1.6中所表明。这种观点使得集体活动研究中心(Research Center for Group Dynamics)的心理学家们提出了图的另外一种心理学解释，其中，人们用一些点来代表，而人与人之间的关系用线来代表，这些关系包括爱、恨、交往和支配。实际上，就是因为这种方法，著者在心理学家弗斯定格(L. Festinger)和卡特赖特(D. Cartwright)的帮助和鼓励下，才对图论有所独到的发现。

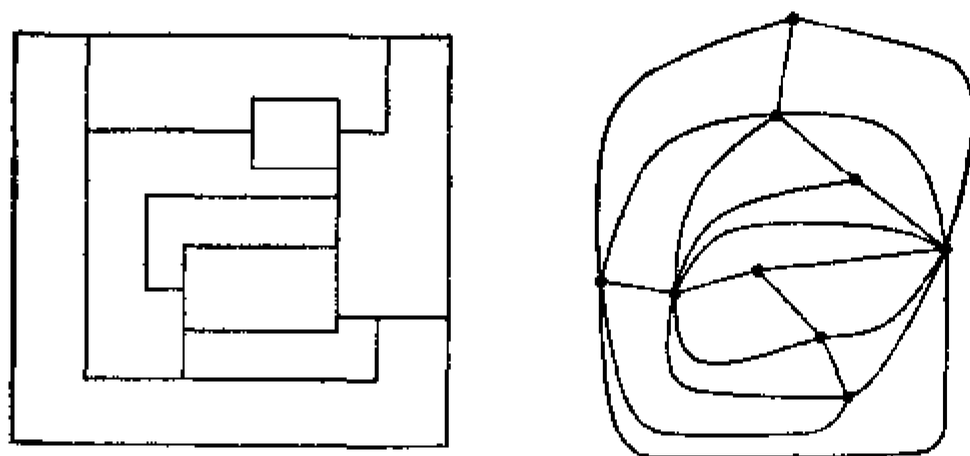


图1.6　一个地图和与它相应的图。

* 莱温只用平面地图，因为他总是将他的图形画在平面上。

因为理论物理学研究的需要，所以在这个学科内不止一次地发现过图论。乌伦伯克(Uhlenbeck)[U1]在统计力学的研究中用点来代表分子，两个点的邻接表示存在某种物理形式的最邻近的相互作用，例如磁的吸力或斥力。在李政道和杨振宁[LY1]的类似解释中，点代表欧几里得空间的小立方体，其中每一个立方体可能被一个分子占有或者不被分子占有。于是，两个点邻接就表示两个空间都被占有。另外，物理学还用图论来作为一种图形的表示方法。在范曼(Feynmann)[F3]提出的图解中，点代表物理粒子，线代表粒子碰撞后的路线。

在概率论中的马尔可夫链的研究中(例如，见弗勒(Feller)[F2, p. 340])引进了有向图，它的意思是：点代表事件，一条从一个点到另外一个点的有向线表示这两个事件直接相继有正的概率。在书[HNC1, p. 371]中，直接定义一个马尔可夫链是一个网络，其中，从每一个点出发的所有有向线的值的和是1。有向图的一种类似的表示法出现在数值分析的矩阵求逆和特征值计算的部分中，瓦尔加(Varga)[V2, p. 48]给出了一些例子。对于一个给定的方阵，特别是"稀疏的"方阵，可以用如下的方式构成一个有向图。用点来代表给定的方阵的行与列的指标，当方阵的 i, j 元非零时有一条从点 i 到点 j 的有向线。马上就可以看出这种方法与处理马尔可夫链的方法的类似性。

线性规划与运筹学的各个飞速发展的领域里也以研究网络上的流的形式利用图论的方法。福特(Ford)和富尔克逊(Fulkerson)[FF2]，瓦达(Vajda)[V1]，贝尔热(Berge)和戈拉-霍里(Ghouila-Houri)[BG2]的书中都以这种方式包含图论。一个图的点表示某种货物可以储藏或装船的实际位置，从一处到另一处的一条有向线和记在这条线上的一个正数代表一条运输货物的水道和它的能力，这个能力给出可以同时通过的最大允许数量。

在纯粹数学中，图论在维布伦(Veblen)的关于拓扑学的先驱著作[V3, pp. 1～35]中就有研究。一个*单纯复形*(或简称为*复形*)被定义为由"点"的一个集 V 和预先给定的 V 的非空子集的一个

集 S 所构成，集 S 的元素称为"单形"，并且满足下列两个条件：

1．每个点是一个单形。

2．一个单形的每个非空子集也是一个单形。

一个单形的维数比其中的点的数目少1；一个复形中维数最大的单形的维数称为这个复形的维数。用这种术语，一个图可以定义为维数等于1或0的一个复形。我们称一个1-维单形为一条线。我们再注意到，一个复形是0-维的当且仅当它只是由点的一个集所组成，而不包含线或其他维数更高的单形。除了这些"全不连通图"外，每一个图是一个1-维复形。就是为了这个理由，为图论写的第一本书[K10]的副标题是"线复形的组合拓扑学"(Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe)。

正因为点与线这两个词的传统用法是作为几何结构的公理系统中不定义的名词，我们才选用了这种术语。当我们说到作为欧几里得空间的子集的"几何的"单纯复形时，与上面定义的抽象复形不同，我们将用顶点与边这两个词。第二章中，我们将要谈到术语问题以及图论的某些基本概念和初等定理。

第二章 图

叫什么名字
　　还不都是一样？
我们不管把玫瑰花
　　叫成什么，
它闻起来还是那么甜香。
——W· 莎士比亚：《罗密欧与朱丽叶》

大多数图论学者在他们的书、论文和演讲中都使用各人自己的一套术语。为了在有关图论的讨论中避免歧义，最好是每人都预先说清楚他所使用的图论语言。甚至就是"图"这个词的意义也是不统一的。有的作者实际上将一个"图"定义为一个图*，而另一些作者则用它来指多重图、伪图、有向图或网络。我们相信，图论的术语是决不可能统一的，而且，也没有这个必要。

但是为了可以利用图论的基本概念和术语，还必须下许许多多的定义。此外，我们还要初步介绍完全子图、极图理论（它探讨有禁用子图的图）、交图（其中点代表集，而非空的交决定邻接性）和图的一些有用的运算。

1. 图簇

在定义一个图之前，我们在图 2.1 中画出有四个点的全部 11 个图。我们就会看到：

i）每个有四个点的图与其中的一个图同构；

ii）虚线左边的五个图是不连通的；

* 最常见的习用的开头是："本文中我们仅考虑有限、没有环和多重边的无向图"。

iii) 虚线右边的六个图是连通的；

iv) 最后一个图是完全图；

v) 第一个图是全不连通的；

vi) 第一个有四条线的图是一个圈；

vii) 第一个有三条线的图是一条道路。

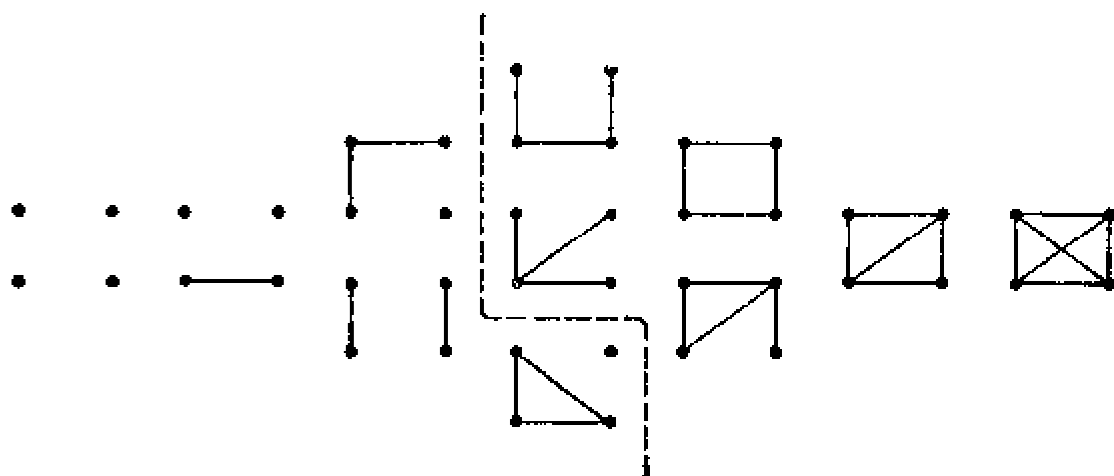


图 2.1 有四个点的图。

下面我们要一个接一个，不厌其烦地对一些基本概念下定义，但不再对这些概念的引伸继续作直观的发展。一个图 G 是由有 p 个点*的非空有限集 $V=V(G)$和预先给定由 V 中不同的点的 q 个无序对构成的一个集 X 组成。X 中的每个点对 $x=\{u, v\}$称作 G 的一条线*，又称 x 是联结 u 和 v 的。我们记 $x=uv$，且称 u 和 v 是邻接的点(有时记作 u adj v)；点 u 与线 x 是互相关联的，v 与 x 也关联。若两条不同的线 x 和 y 与一个公共的点关联，则称 x 与 y 是邻接的线。一个有 p 个点与 q 条线的图称为一个(p, q)图。$(1, 0)$图是平凡的。

习惯上用一个图解来代表一个图，并且将它看作就是这个图。于是，在图 2.2 中的图 G 中，点 u 与点 v 是邻接的，而 u 与 w 不邻接；线 x 和 y 是邻接的，而 x 与 z 不邻接。虽然线 x 和 z 在图解中

* 下表的横行中给出曾在文献中出现过的同义词，但并不总是按照所列的上下次序配对：

point, vertex, node, junction, 0-simplex, element;

line, edge, arc, branch, 1-simplex, element.

相交，但它们的交点并不是这个图的一个点。

还应该提到图的几种变形。我们要注意，图的定义中不允许有环，即没有将一个点与它自己联结的线。在一个多重图中，不允许有环，但联结两个点可以有不止一条线。这些线称为多重线。若环和多重线都允许有，就得到一个伪图。图 2.3 中给出的一个多重图和一个伪图具有同一个“基本图”，即一个三角形。我们现在可以看到，为什么哥尼斯堡七桥问题的图(图 1.2)实际上是一个多重图。

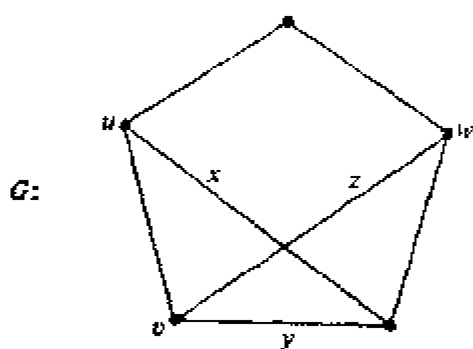


图 2.2 说明邻接性的一个图。

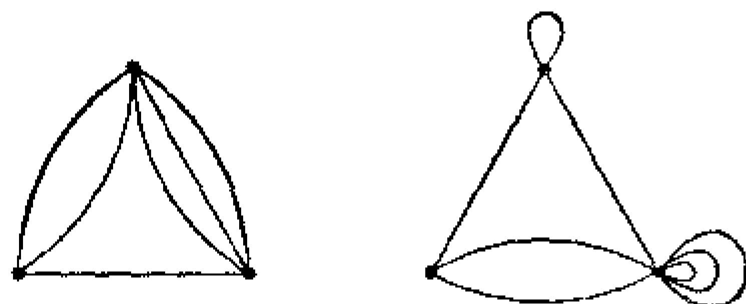


图 2.3 一个多重图和一个伪图。

一个有方向的图或有向图 D 是由一个非空有限点集 V 和预先给定的不同点的有序对的一个集 X 组成。X 的元素称为有向线或弧。按定义，有向图没有环或多重弧。一个定向图是没有有向线对称对的有向图。在图 2.4 中画出所有有三个点和三条弧的有向图；其中最后二个是定向图。有向图是第十六章的主题，但我们也将常常临时提到它们。



图 2.4 有三个点和三条弧的有向图。

一个图 G 称为是标定的，若它的 p 个点标以不同的名称，如

$v_1, v_2, \cdots, v_p$* 以示区别。例如图 2.5 中的两个图 G_1 和 G_2 是标定的，而 G_3 则不是。

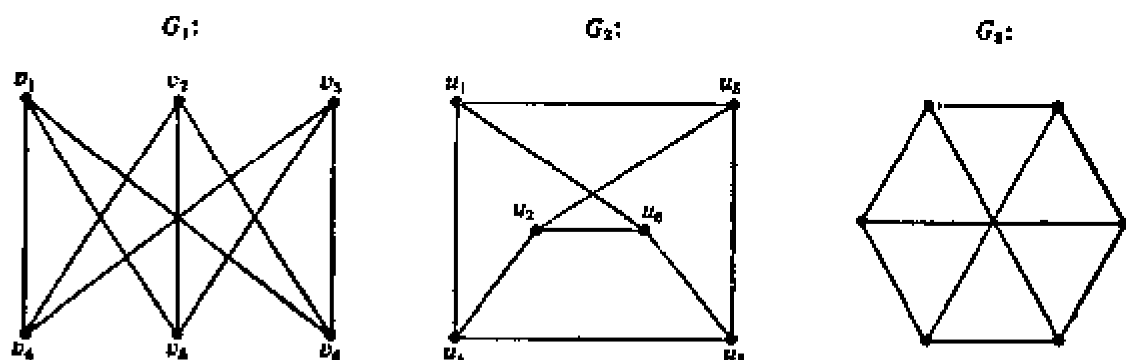


图 2.5 标定的和非标定的图。

若在两个图 G 和 H 的点集之间存在一个保持邻接性的一一对应，则称它们是同构的（记作 $G\cong H$，有时也记作 $G=H$）。例如，图 2.5 中的 G_1 和 G_2 在对应 $v_i\leftrightarrow u_i$ 之下是同构的。顺便可以看出，G_3 与 G_1、G_2 中的任何一个都同构。显然，同构关系是图的一个等价关系。

一个图 G 的一个不变量是与 G 有关的一个数，它对于任何一个与 G 同构的图有相同的值。于是，数 p 与 q 就是不变量。不变量的完全集是可以完全决定一个图直到同构的一个不变量组。例如，数 p 与 q 对于点数少于 4 的所有图构成这样的一个集。对于一般的图，现在还不知道适用的不变量完全集。

G 的一个子图是所有的点和线都属于 G 的一个图。若 G_1 是 G 的一个子图，则 G 是 G_1 的一个母图。一个生成子图是一个含有 G 的所有的点的子图。对于 G 的点的任何一个集 S，导出子图 $\langle S\rangle$ 是 G 的以 S 为点集的最大的子图；也就是说，S 的两个点在 $\langle S\rangle$ 中邻接当且仅当它们在 G 中邻接。在图 2.6 中，G_2 是 G 的一个生成子图，而 G_1 不是；G_1 是一个导出子图，而 G_2 不是**。

* 因为 v 是顶点(vertex)的第一个字母，所以我们用它来记点。有的作者称它们为顶点，但记为 $p_1, p_2, \cdots, p_r$。

** 下面还要用到由图 G 的一个线集 $X'\subset X(G)$ 导出的子图，它是指以 $V(G)$ 中与 X' 中的线关联的各点为点集，以 X' 为线集的 G 的子图。

——译注

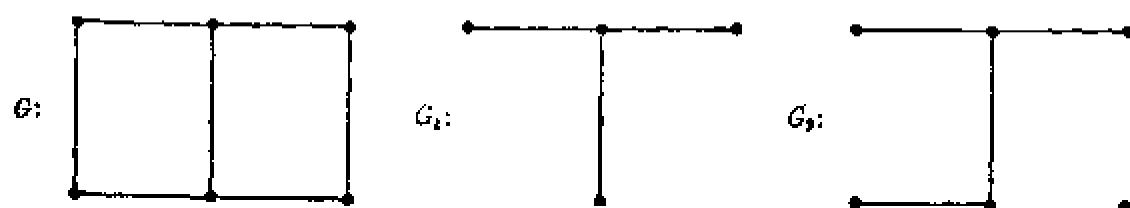


图 2.6 一个图和二个子图。

由一个图 G 移去一个点 v_i 产生的 G 的子图 $G-v_i$ 是由 G 的除 v_i 外的所有的点和与 v_i 不关联的所有的线组成的。所以，$G-v_i$ 是 G 的不含 v_i 的最大的子图。另一方面，由 G 移去一条线 x_j 产生一个含有 G 中除 x_j 外的所有的线的生成子图 $G-x_j$。所以，$G-x_j$ 是 G 的不含 x_j 的最大的子图。由 G 移去它的点或线的一个集定义为相继移去这个集的各个元素。反过来，若 v_i 与 v_j 在 G 中不邻接，加上一条线 v_iv_j 产生 G 的一个含有线 v_iv_j 的最小的母图。这些概念可用图 2.7 来说明。

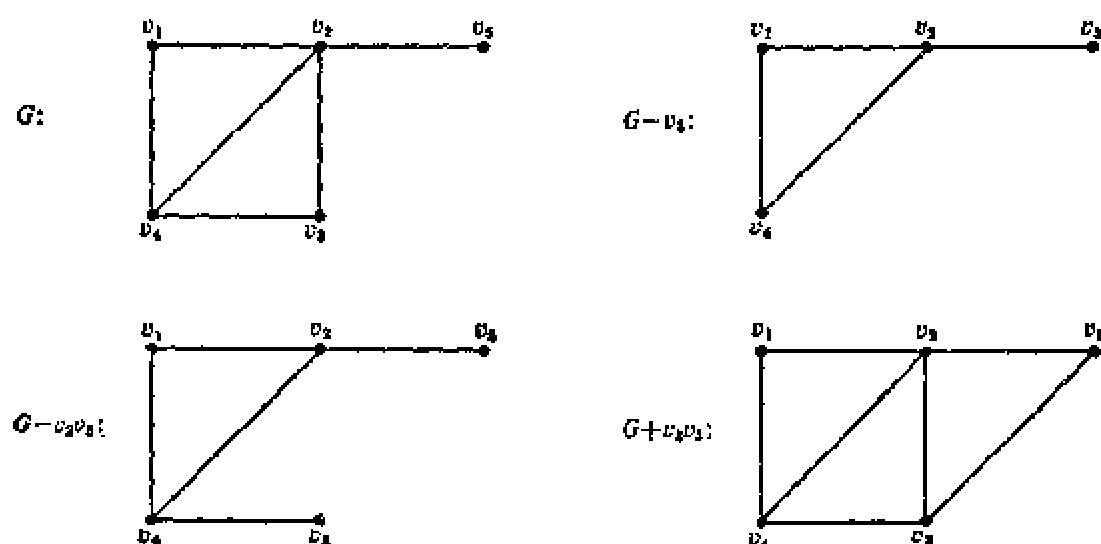


图 2.7 一个图加上或移去一个特定的点或线。

对于某些图，去掉一个点或者去掉一条线或者加上一条线所产生的图与我们选取哪一个点或者哪一条线无关；对于这样的图

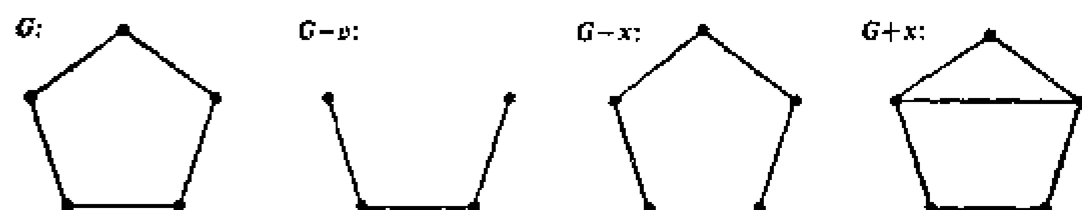


图 2.8 一个图加上或移去一个点或一条线。

G，我们就相应地用 $G-v$，$G-x$ 或者 $G+x$ 来记得到的图；见图 2.8。

乌拉姆(Ulam)想通过下述猜想[U2, p. 29]来表明，G 的子图 $G-v_i$ 的总体*可以给出足够多的关于 G 本身的信息。

乌拉姆猜想**　令 G 有 p 个点 v_i，H 有 p 个点 u_i，$p\geqslant 3$。若对每个 i，子图 $G_i=G-v_i$ 与 $H_i=H-u_i$ 同构，则图 G 与 H 同构。

有一个与这个猜想等价的观点[H29]，即将 p 个非标定图 $G-v_i$ 每一个画在一张 3×5 卡片上，这个猜想就是说：任何一个图，只要由这个图每次去掉一个点可以得到这些卡片上的图，这个图就同构于 G。于是，乌拉姆猜想也就是断言了：有同一套卡片的任何两个图是同构的。但是，我们宁可去证明：从任何一套相容的***卡片只能重构一个图。

2. 通道和连通性

任何一个图的最基本的性质之一是它是否连通。这一节中，我们要阐明连通与不连通的图的基本结构。

一个图 G 的一条通道是点与线的一个交替序列 $v_0, x_1, v_1, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$。它以点开始，以点结束，其中每条线关联于直接在它前面与直接在它后面的这两个点。这条通道联结 v_0 与 v_n，也可以记作 $v_0v_1v_2\cdots v_n$(这样也显然表示了组成这条通道的各条线)；有时也将它称为一条 v_0-v_n 通道。如果 $v_0=v_n$，它称为是闭的；否则，它就称为是开的。若它的所有的线都不同，它称为是一条迹。又若它的所有的点都不同(从面所有的线必然都不同)，它称为是一条道路。又若一条通道是闭的，而且它的 n 个点都不同，

---

* 总体(collection)与集(set)不同，总体考虑同一个元素的重复次数，而集则不考虑。如 $\{a, a, b\}$ 与 $\{a, b, b\}$ 是不同的总体，但是同一个集。本书中有时两者混用，而译文则按实际意义译出。——译注

** 奉劝读者不要试图去解决这个猜想，因为看来它是非常困难的。

*** 这是指一套可以从某个图实际得到的卡片。另外一个看来也是困难的问题是：决定一套给定的卡片什么时候才是相容的。

$n\geqslant3$，则它称为是一个圈。

在图 2.9 中的标定图 G 中，$v_1v_2v_5v_2v_3$ 是一条通道，但不是一条迹；而 $v_1v_2v_5v_4v_2v_3$ 是一条迹，但不是一条道路；$v_1v_2v_5v_4$ 是一条道路，而 $v_2v_4v_5v_2$ 是一个圈。

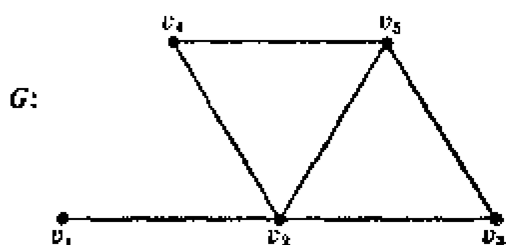


图 2.9 用以说明通道的一个图。

我们用 C_n 记由一个有 n 个点的圈构成的一个图；用 P_n 记由一条有 n 个点的道路构成的一个图。C_3 常称为一个三角形。

若一个图的每一对点都由一条道路所联结，这个图就称为是连通的。G 的一个最大的连通子图称为一个连通支，或简称为 G 的一个支。于是，一个不连通的图至少有二个支。图 2.10 中的图有 10 个支。

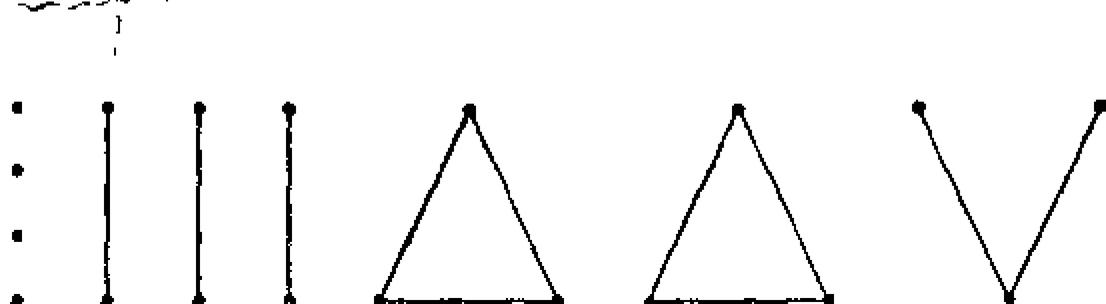


图 2.10 一个有 10 个支的图。

一条通道 $v_0v_1\cdots v_n$ 的长度是 n，n 也就是这条通道中的线的数目。一个图 G 中最短的圈（假如 G 中有圈）的长度记作 $g(G)$，称为 G 的围长；G 中任何一个最长的圈的长度称为 G 的周长 $c(G)$。注意，如果 G 中没有圈，这两个名词就没有定义。

对于 G 中的两个点 u 与 v，当存在联结 u 和 v 的道路时，这种道路中最短的道路的长度称为 u 与 v 之间的距离 $d(u, v)$；如果不存在联结 u 和 v 的道路，则 $d(u, v)=\infty$。在一个连通图中，距离是一个度量；也就是说，对所有的点 u、v 和 w，

1. $d(u, v)\geqslant0$，并且当且仅当 $u=v$ 时，$d(u, v)=0$；
2. $d(u, v)=d(v, u)$；

3. $d(u, v)+d(v, w)\geqslant d(u, w)$。

一条最短的 u-v 道路常称为一条测地线。一个连通图 G 中任何一条最长的测地线的长度叫做 G 的直径 $d(G)$。图 2.9 中的图 G 有围长 $g=3$，周长 $c=4$ 和直径 $d=2$。

一个图 G 的平方 G^2 是这样的一个图，它有 $V(G^2)=V(G)$，且当 u, v 在 G 中 $d(u, v)\leqslant 2$ 时，u 和 v 在 G^2 中邻接。类似地可以定义 G 的幂 G^3, G^4, …。

3.度

图 G 中与一个点 v_i 关联的线的数目叫做点 v_i 的度*，记作 d_i 或 $\deg v_i$。因为每一条线与二个点关联，所以加上一条线就使得各点的度的和增加 2。于是我们得到了属于欧拉[E6]的一个结果，这个结果是图论中的第一个定理！

定理 2.1 一个图 G 的各个点的度的和是线的数目的二倍，

$$\sum \deg v_i=2q。\tag{2.1}$$

系 2.1(a) 在任何一个图中，度为奇数的点的数目是偶数**.

在一个 (p, q) 图中，对每个点 v，$0\leqslant\deg v\leqslant p-1$。$G$ 的各个点中的最小的度记作 $\min\deg G$ 或 $\delta(G)$，而最大的度记作 $\Delta(G)=\max\deg G$。如果 $\delta(G)=\Delta(G)=r$，则 G 的所有的点的度都相等，这时 G 称为是 r 度正则的。在这种情形下我们说 G 的度，并且记作 $\deg G=r$。

一个 0 度正则的图根本就没有线；若 G 是 1 度正则的，则每个支恰含有一条线；若 G 是 2 度正则的，则每个支是一个圈；这些命题的逆命题当然也都成立。第一种有意义的正则图是那些度等于 3 的图，这种图称为三次图。图 2.11 中画出了二个有 6 个点的三次图。其中第二个图与图 2.5 中的三个图的每一个都同构。

系 2.1(b) 每一个三次图都有偶数个点。

为了方便起见，我们给度数较小的点都取个名字。若

---

* 有时称为价(valency)。

** 请读者记住，我们在课文中并不给出所有的定理的证明(见序)。



图 2.11 有6个点的三次图。

$\deg v=0$，称 v 是孤立的；若 $\deg v=1$，称 v 是一个端点。

4. 拉姆齐问题

一个现在已经非常有名的难题(拉姆齐问题)可以用下列形式来表述：

试证在任何一个有6个人的组里，存在三个人互相认识，或者存在三个人互相不认识。

这种情况可以用一个图 G 来代表，其中用6个点来代表人，并且用邻接性来代表认识关系。这样一来，这个问题就是要证明：G 有三个互相邻接的点或者有三个互相不邻接的点。一个图 G 的补图 $\overline{G}$ 也是以 $V(G)$ 为点集的一个图，但是两个点在 $\overline{G}$ 中邻接当且仅当它们在 G 中不邻接。在图 2.12 中，G 没有三角形，而 $\overline{G}$ 由正好二个三角形所组成*。一个自补的图是和它的补图同构的图。(见图 2.13)。

完全图 K_p 是有 p 个点**而且每一对点都邻接的图。于是 K_p

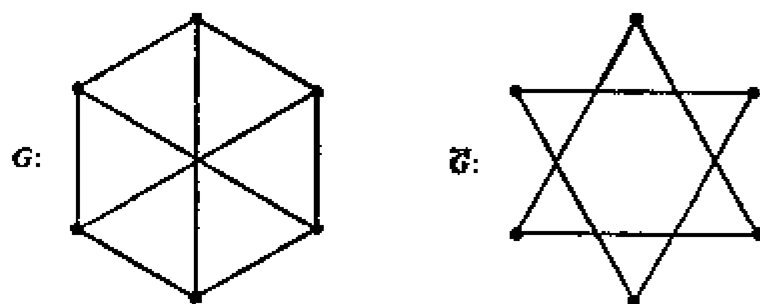


图 2.12 一个图和它的补图。

* 当 $\overline{G}$ 画成图 2.12 的样子时，这两个三角形的并曾经被称为戴维(David)图。

** 因为 V 非空，所以 $p\geqslant 1$。有的作者允许有"空图"(如果要说到它，我们将记作 K_0)，于是就需要处理它的性质，并且要限制某些定理只对于非空的图成立。但是我们将这个概念看作是没有点。

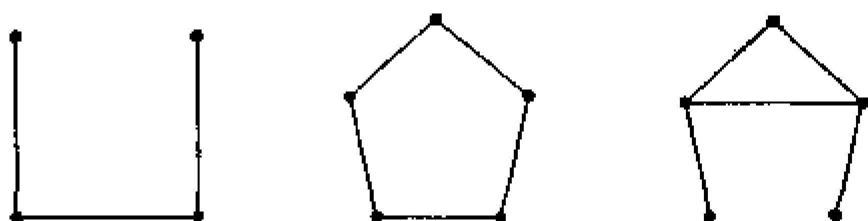


图 2.11 最小的非平凡的自补图。

有$\binom{p}{2}$条线，而且是$(p-1)$度正则的。如我们已经见到，K_3 称为一个三角形。图 $\overline{K}_p$ 是全不连通的，而且是 0 度正则的。

利用上面给出的这些术语，拉姆齐问题可以重新叙述如下：

定理 2.2 对任何一个有 6 个点的图 G，G 中或 $\overline{G}$ 中含有一个三角形。

［证明］ 令 v 是有 6 个点的一个图 G 中的一点。因为 v 与 G 的其余 5 个点或者在 G 中邻接，或者在 $\overline{G}$ 中邻接。我们可以不失一般性地假定，有三个点 u_1, u_2, u_3 在 G 中与 v 邻接。如果这些点中有任何两个点邻接，则它们与 v 就是一个三角形的三个点。如果其中不存在两个在 G 中邻接的点，则 u_1, u_2, u_3 就是 $\overline{G}$ 中的一个三角形的三个点。

定理 2.2 的结果提出了一个一般的问题：求一个最小的整数 $r(m, n)$，使得任何有 $r(m, n)$ 个点的图一定含有 K_m 或者 $\overline{K}_n$。

数 $r(m, n)$ 称为*拉姆齐数**。当然有 $r(m, n)=r(n, m)$。求拉姆齐数的问题还没有解决，而厄尔多斯(Erdös)和杰克斯(Szekeres)［ES1］已经得出了一个简单的界：

$$r(m, n)\leqslant\binom{m+n-2}{m-1}。\tag{2.2}$$

这个问题是由拉姆齐(Ramsey)的一个定理引起的。一个*无限图*** 的点集是无限的并且没有环和多重线。拉姆齐［R2］(用

* 这个数以现任坎脱勃兰(Canterbury)大主教的已故兄弟弗兰克·拉姆齐(Frank Ramsey)的名字命名。$r(m, n)$对于所有的正整数 m 和 n 都存在的证明可见例如霍尔(Hall)［H7, p. 55］。

** 请注意，按照图的定义，无限图并不是一个图。纳什-威廉斯(Nash-Williams)已经写了一篇论述无限图的综合性文章［N3］。

集论的语言)证明了每个无限图含有 $\aleph_0$ 个互相邻接的点或者 $\aleph_0$ 个互相不邻接的点。

根据格雷弗(Graver)和亚克尔(Yakel)的综合文章[GY1]，表 2.1 中列出了所有已知的拉姆齐数。

表 2.1 拉姆齐数

n \ m	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7
3	3	6	9	14	18	23
4	4	9	18			

5. 极图

下列托兰(Turán)[T3]的有名定理是极图理论领域里的先驱，见[E3]。如通常那样，令$[r]$是不超过实数 r 的最大的整数，而$\{r\}=-[-r]$，它是不小于 r 的最小的整数。

定理 2.3 所有有 p 个点而没有三角形的图中最多有$[p^2/4]$条线。

[证明] 对于小的 p，这是显然的。可以分别对奇的 p 和偶的 p 给出一个归纳的证明。在这里，我们只给出后者。假定对所有偶的 $p\leqslant 2n$ 定理成立，我们证明对于 $p=2n+2$ 定理也成立。令 G 是一个有 $p=2n+2$ 个点而没有三角形的图。因为不需要考虑 G 为全不连通的情形，故 G 有两个邻接的点 u 和 v。子图 $G'=G-\{u, v\}$有 $2n$ 个点并且也没有三角形，所以由归纳法假设，G' 至多有$[4n^2/4]=n^2$ 条线。G 在此外还能有几条线呢？不能有一个点 w，使得 u 和 v 都和 w 邻接，因为这样一来 u, v, w 就是 G 中的一个三角形的三个点了。所以，如果 u 与 G' 中的 k 个点邻接，v 至多只能与 G' 中的 $2n-k$ 个点邻接。于是 G 中线的数目至多是

$$n^2+k+(2n-k)+1=n^2+2n+1=p^2/4=[p^2/4]。$$

为了完成证明，我们必须对全部偶的 p 证明：存在一个没有三

角形的$(p, p^2/4)$图。这样的一个图可以构成如下：取各有$p/2$个点的两个集V_1和V_2，将V_1的每个点与V_2的每个点联结起来。对于$p=6$，这就是图2.5中的图G_1。

如果一个图G的点集V能够划分为两个子集V_1和V_2，使得G的每一条线都联结V_1与V_2中的各一个点，则G称为一个双图(或二部图)*。例如，图2.14(a)的图可以重新画成图2.14(b)的样子，这样就可以看出它是一个双图。

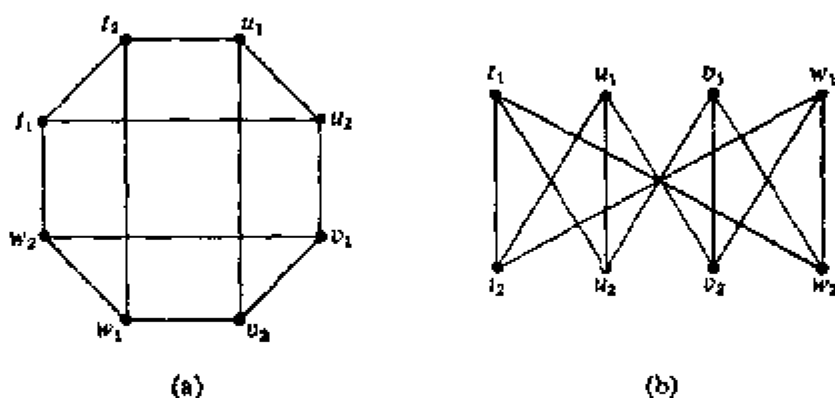


图 2.14 一个双图。

若双图G中含有每一条联结V_1与V_2的点的线，则称G为一个完全双图。若V_1和V_2各有m和n个点，我们记$G=K_{m,n}=K(m, n)$。完全双图$K_{1,n}$称为一个星形图**。显然，$K_{m,n}$有mn条线。所以，若p为偶数，$K(p/2, p/2)$有$p^2/4$条线；若p为奇数，$K([p/2], \{p/2\})$有$[p/2]\cdot\{p/2\}=[p^2/4]$条线。由科尼希(König)[K10, p. 170]的一个定理可以得到，所有双图都没有三角形。

定理 2.4 一个图当且仅当它的所有的圈的长度是偶数时是一个双图。

[证明] 若G是一个双图，则它的点集V可以划分成两个集V_1与V_2，使得G的每一条线联结V_1的一个点与V_2的一个点。于

* 也称为可双色图(bicolorable graph)、对图(pair graph)、偶图(even graph)等等。

** 当$n=3$时，霍夫曼(Hoffman)[H43]称$K_{1,n}$为爪形(claw)图；厄尔多斯和伦依(Rényi)[ER1]称之为樱形(cherry)图。

是，对于 G 中的每个圈 $v_1v_2\cdots v_nv_1$，必然是它的下标为奇数的点在例如 V_1 中，其余的点在 V_2 中。因此它的长度为 n 偶数。

反之，我们可以不失一般性地假定 G 是连通的（否则我们可以分别考虑它的每一个支）。任取一个点 $v_1\in V$，又令 V_1 由 v_1 和所有与 v_1 的距离为偶数的点所组成，而 $V_2=V-V_1$。由于 G 的所有的圈的长度都是偶数，可得 G 的每一条线都联结 V_1 的一个点与 V_2 的一个点。因为，如果有一条线 uv 联结了 V_1 的两个点，那末，从 v_1 到 u 的测地线，从 v_1 到 v 的测地线和线 uv 这三者的并中含有一个长度为奇数的圈。这是一个矛盾。

定理 2.3 是“极图理论”中的一个问题的第一种情形：对于一个给定的图 H，求有 p 个点而不含禁用子图 H 的一个图中最多能够含有的线的数目，记为 $\mathrm{ex}(p, H)$。定理 2.3 就是说 $\mathrm{ex}(p, K_3)=[p^2/4]$。极图理论中的另外一些结果[E3]是：

$$\mathrm{ex}(p, C_p)=1+(p-1)(p-2)/2, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{ex}(p, K_4-x)=[p^2/4], \tag{2.4}$$

$$\mathrm{ex}(p, K_{1,3}+x)=[p^2/4]。 \tag{2.5}$$

托兰[T3]推广了他的定理 2.3，他对所有的 $n\leqslant p$，求出了 $\mathrm{ex}(p, K_n)$，

$$\mathrm{ex}(p, K_n)=\frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)}+\binom{r}{2}, \tag{2.6}$$

其中，$p\equiv r(\mathrm{mod}(n-1))$ 且 $0\leqslant r<n-1$。莫茨金(Motzkin)和斯特劳斯(Straus)[MS1]给出了这个结果的一个新的证明。

我们还知道，每一个 $(2n, n^2+1)$ 图含有 n 个三角形，每一个 $(p, 3p-5)$ 图在 $p\geqslant 6$ 时含有两个不相交的圈，每一个 $(3n, 3n^2+1)$ 图含有 n^2 个长度等于 4 的圈。

6. 交图

令 S 是一个集，$F=\{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$ 是 S 的不同的非空子集的一个非空族，这些子集的并是 S。F 的交图，记作 $\Omega(F)$，定义为 $V(\Omega(F))=F$，当 $i\neq j$ 且 $S_i\cap S_j\neq\emptyset$ 时 S_i 与 S_j 邻接。于是，如果

存在 S 的子集的一个族 F，对于这个族，$G\cong\Omega(F)$，就称图 G 是 S 上的一个交图。现在叙述一个关于交图的早期的结果[M4]。

定理2.5　每一个图都是一个交图。

［证明］　对于 G 的每一个点 v_i，令 S_i 是 $\{v_i\}$ 与关联于 v_i 的线的集的并。于是立即可以得到，G 与 $\Omega(F)$ 同构，其中 $F=\{S_i\}$。

有了这个定理，我们就可以定义另外一个不变量。给定的图 G 的交数 $\omega(G)$ 是构成一个集 S 所需要的最少的元素的数目，而使得 G 是 S 上的一个交图。

系2.5(a)　若 (p, q) 图 G 是连通的，$p\geqslant 3$，则 $\omega(G)\leqslant q$。

［证明］　在这种情形下，可以从定理的证明中所用到的各个集 S_i 中把各个点略去，于是 $S=X(G)$。

系2.5(b)　若 G 有 p_0 个孤立点，且没有 K_2 支，则 $\omega(G)\leqslant q+p_0$。

下面这个结果告诉我们什么时候可以达到系2.5(a)中的上界。

定理2.6　令 G 是一个有 $p>3$ 个点的连通图，则当且仅当 G 中没有三角形时，$\omega(G)=q$。

［证明］　我们先证充分性。因为有了系2.5(a)，只要证明对于任何一个至少有四个点而没有三角形的连通图 G 有 $\omega(G)\geqslant q$ 就好了。按交数的定义，G 同构于在一个集 S 上的一个交图，而 $|S|=\omega(G)$。对于 G 的每个点 v_i，令 S_i 是相应的集。因为 G 没有三角形，所以 S 中没有一个元素可以属于二个以上的集 S_i。而且，$S_i\cap S_j\neq\emptyset$ 当且仅当 v_iv_j 是 G 的一条线。于是我们可以在 G 的线与 S 的那些属于正好二个集 S_i 的元素之间建立一个一一对应。从而 $\omega(G)=|S|\geqslant q$，因此 $\omega(G)=q$。

为了证明必要性，令 $\omega(G)=q$，并且假定 G 有一个三角形。再令 G_1 是 G 的一个最大的没有三角形的生成子图。由上一段可知，$\omega(G_1)=q_1=|X(G_1)|$。假定 $G_1=\Omega(F)$，此处 F 是某个基数为 q_1 的集 S 的子集的一个族。令 x 是 G 的一条不在 G_1 中的线。

考虑 $G_2=G_1+x$。因为 G_1 是一个最大的没有三角形的生成子图，G_2 中一定有某个三角形，例如 $u_1u_2u_3$，其中 $x=u_1u_3$。用 S_1, S_2, S_3 来记 S 的相应于 u_1, u_2, u_3 的子集。现在，假如 u_2 在 G_1 中只与 u_1 和 u_3 邻接，用一个从 $S_1\cap S_2$ 中选取的单元素集来代替 S_2，并且将这个元素加入 S_3。否则，从 $S_1\cap S_2$ 中选出任何一个元素加入 S_3 来作为新的 S_3。无论在哪一种情形，这样给出 S 的不同的子集的一个族 F'，使得 $G_2=\Omega(F')$。于是 $\omega(G_2)=q_1$。但是，$|X(G_2)|=q_1+1$。如果 $G_2\cong G$，就已经证好了；而如果 $G_2\neq G$，则令

$$|X(G)|-|X(G_2)|=q_0,$$

可以得到，G 是在有 q_1+q_0 个元素的一个集上的一个交图*。然而，$q_1+q_0=q-1$，于是 $\omega(G)<q$，证毕。

图的交数最早是由厄尔多斯，古德曼(Goodman)和波塞(Pósa)[EGP1]所研究的。他们得出了有给定数目的点的图的交数的最佳可能上界。

定理 2.7 对于任何一个有 $p\geqslant 4$ 个点的图 G，

$$\omega(G)\leqslant[p^2/4]。$$

他们的证明基本上和定理 2.3 的证明一样。

可以对每一个图定义一个依赖于这个图的完全子图的交图。一个图的一个团是一个最大的完全子图。一个给定的图 G 的团图是 G 的团的族**的交图。例如，图 2.15 中的图 G 显然以 K_4 作为它的团图。然而，并不是每个图都是某个图的团图。哈梅林克(Hamelink)[H9]已经证明，图 2.15 中的图 G 就是一个反例！F. 罗伯茨和 J. 斯潘塞刚刚给出了团图的特征***。

定理 2.8 一个图 G 是一个团图当且仅当它含有完全子图的

---

* 对于 $X(G)-X(G_2)$ 中每一条线 u_iu_j，在 F' 的相应于 u_i 与 u_j 的元素中同时加入一个新的元素 e_{ij}，这样共加入 q_0 个元素，得到一个新的族 F''，有 $G\cong\omega(F'')$，而 $|S\cup\{e_{ij}\}|=q_1+q_0$。 ——译注

** 每一个团看作它的点的集。——译注

*** 见 Fred S. Roberts, Joel H. Spencer, A Characterizationof Clique Graphs, *J. Combinatorial Theory*, Ser. B, 10 (1971), 102~108。——译注

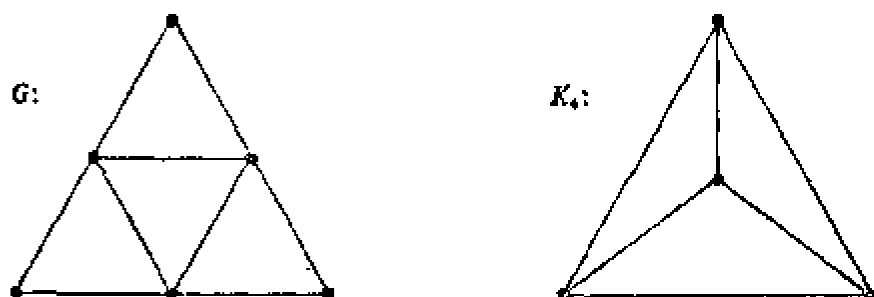


图 2.15 一个图和它的团图。

一个族 F，它们的并是 G，并且，如果 F 的某个子族 F' 中每一对完全子图的交非空，则 F' 的所有元素的交就非空。

附记

本译(Benzer)[B9]在生物遗传学的领域中发现了交图的一个特殊族。他建议将代表一个细菌染色体的一串基因看作实轴上的一个闭区间。哈乔斯(Hajös)[H2]独立地提出，对区间 S_i 的每一个有限族 F，可以定义一个图。用交图的语言来说，这个图正好就是 $\Omega(F)$。一个区间图是同构于某个图 $\Omega(F)$ 的一个图，其中 F 是一族区间。勃兰特(Boland)和勒可可可(Lekkerkerker)[BL2]，吉尔摩(Gilmore)和霍夫曼[GH2]给出了区间图的特征。

7. 图的运算

能用较小和较简单的图来表达一个给定的图的结构是很方便的。对经常出现的图也值得给一个简单的记法。我们已经引入了完全图 K_p 和它的补图 $\overline{K}_p$，圈 C_n，道路 P_n 和完全双图 $K_{m,n}$。

本节中，图 G_1 和 G_2 分别有不相交的点集 V_1、V_2 和线集 X_1、X_2。可以想得到，它们的并* $G=G_1\cup G_2$ 定义为 $V=V_1\cup V_2$，$X=X_1\cup X_2$。季可夫(Zykov)[Z1]所定义的它们的联是由 $G_1\cup G_2$ 和所有的联结 V_1 和 V_2 的线所组成的图，记作 G_1+G_2。特别有 $K_{m,n}=\overline{K}_m+\overline{K}_n$。对于 $G_1=K_2=P_2$ 和 $G_2=K_{1,2}=P_3$，这些运算用图 2.16 来说明。

* 当然，非不相交的两个图的并也按这种方式来定义。

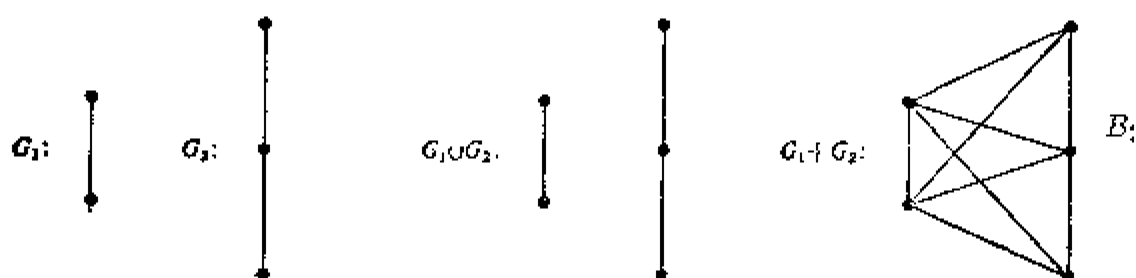


图 2.16 两个图的并和联。

对于任何一个连通图 G，我们用 nG 来记由 n 个与 G 同构的支构成的图。于是，如同在[HP14]中一样，我们可以将每个图写成 $\bigcup n_iG_i$ 的形式，其中当 $i\neq j$ 时 G_i 与 G_j 不同。如图 2.10 中的不连通图是 $4K_1\cup 3K_2\cup 2K_3\cup K_{1,2}$。

有几种由图 G_1 和 G_2 进行的运算，其中产生的图 G 的点集是笛卡儿积 $V_1\times V_2$。这些运算有积(或者叫笛卡儿积，见赛别度西(Sabidussi)[S5])和合成[H21](或字典式积，见赛别度西[S6])。其余的积这一类的运算*由哈拉里和威尔科克斯(Wilcox)[HW1]所发展。

为了定义积 $G_1\times G_2$，考虑 $V=V_1\times V_2$ 中的任意两个点 $u=(u_1, u_2)$ 和 $v=(v_1, v_2)$，当[$u_1=v_1$ 以及 $u_2 \operatorname{adj} v_2$]或[$u_2=v_2$ 以及 $u_1 \operatorname{adj} v_1$]时 u 和 v 在 $G=G_1\times G_2$ 中邻接。图 2.17 中画出了 $G_1=P_2$ 和 $G_2=P_3$ 的积。

合成 $G=G_1[G_2]$ 也以 $V=V_1\times V_2$ 为它的点集，而 $u=(u_1, u_2)$ 和 $v=(v_1, v_2)$ 当[$u_1 \operatorname{adj} v_1$]或[$u_1=v_1$ 以及 $u_2 \operatorname{adj} v_2$]时邻接。对于

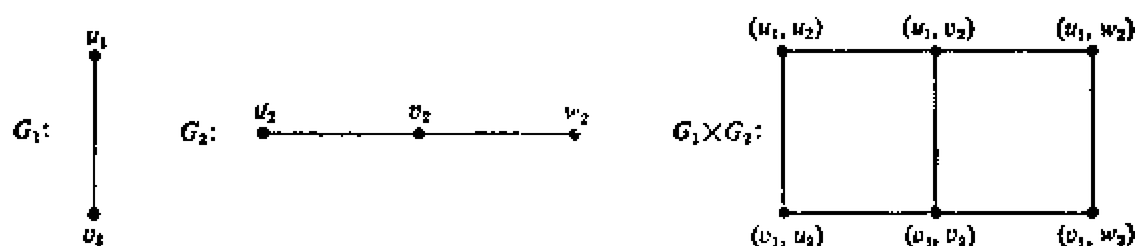


图 2.17 两个图的积。

* 这些运算有张量积(韦克塞尔(Weichsel)[W6]，麦克安德鲁(McAndrew)[M7]，哈拉里和特劳思(Trauth)[HT1]，布劳尔迪(Brualdi)[B17])和在贝尔热[B12, p. 23]，奥尔[O5, p. 35]以及德(Ted)和约(Yap)[TY1]中所定义的其余类型的积。

图 2.17 中的两个图 G_1 和 G_2，两种合成 $G_1[G_2]$和 $G_2[G_1]$都画在图 2.18 中，它们显然并不同构。

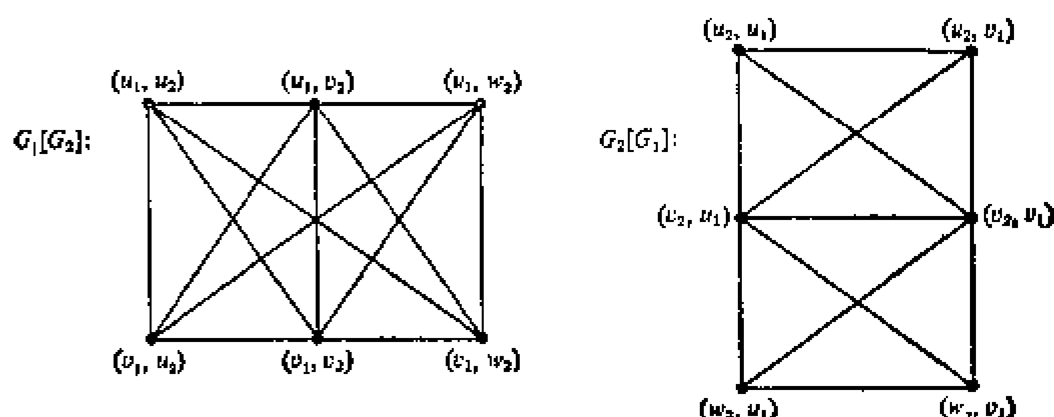


图 2.18　图的两种合成。

若 G_1 和 G_2 分别是(p_1, q_1)图和(p_2, q_2)图，则对于上面讲过的每一种运算，可以计算出运算结果的图中的点和线的数目。这些数目列在下表中：

表 2.2　图的二元运算

运　算	点 的 数 目	线 的 数 目
并　$G_1\cup G_2$	p_1+p_2	q_1+q_2
联　G_1+G_2	p_1+p_2	$q_1+q_2+p_1p_2$
积　$G_1\times G_2$	p_1p_2	$p_1q_2+p_2q_1$
合成　$G_1[G_2]$	p_1p_2	$p_1q_2+p_2^2q_1$

完全 n 部图$K(p_1, p_2, \cdots, p_n)$定义为累次联 $\overline{K}_{p_1}+\overline{K}_{p_2}+\cdots+\overline{K}_{p_n}$。它显然有 $\sum p_i$ 个点和 $\sum_{i<j}p_ip_j$ 条线。

一族特别重要的图称为方体，它用积来定义最为自然。n–方体 Q_n 递推地定义为 $Q_1=K_2$，$Q_n=K_2\times Q_{n-1}$。于是 Q_n 有 2^n 个点，它的点可以用 $a_1a_2\cdots a_n$ 来标定，其中每个 a_i 是 0 或者 1。如果 Q_n 的两个点的二进位表示式中只有一处不同，则它们邻接。图 2.19 中画出了已经经过适当的标定的 2–方体与 3–方体。

如果图 G 与 H 有下列性质：将 G 的一个任意点与 H 的一个任意点等同起来只产生唯一的图(直至同构)，则将这个图记作 $G\cdot H$。例如，在图 2.16 中，$G_2=K_2\cdot K_3$，而在图 2.7 中，$G-v_5$

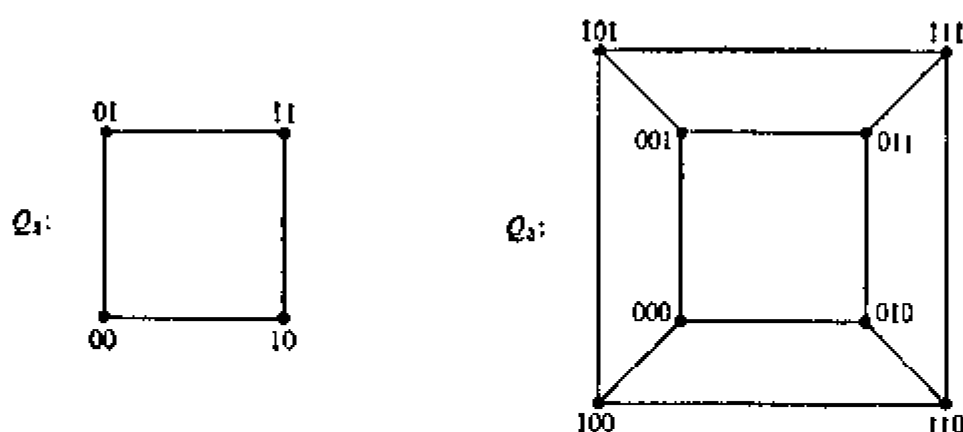


图 2.19 两个方体。

$=K_3 \cdot K_2$。

习题*

2.1 画出所有有 5 个点的图(然后与附录 1 中给出的图解对照)。

2.2 由图 G 的各子图 $G_i=G-v_i$ 重构这个图，其中 $G_1=K_4-x$, $G_2=P_3\cup K_1$, $G_3=K_{1,3}$, $G_4=G_5=K_{1,3}+x$。

2.3 每一条长度为奇数的闭通道含有一个圈*。

2.4 证明或否定:

a) 联结两个点的任何两条不同的通道的并含有一个圈。

b) 联结两个点的任何两条不同的道路的并含有一个圈。

2.5 一个图 G 是连通的当且仅当对于将 V 分成两个子集 V_1 与 V_2 的任何划分有 G 的一条联结 V_1 的一个点和 V_2 的一个点的线。

2.6 若在 G 中 $d(u, v)=m$, 在 n 次幂 G^n 中 $d(u, v)$ 是多少?

2.7 若 $H^2=G$, 图 H 就是 G 的一个平方根。一个有 p 个点的图 G 有一个平方根当且仅当它含有 p 个完全子图 G_i, 使得

1. $v_i\in G_i$,

2. $v_i\in G_j$ 当且仅当 $v_j\in G_i$,

---

* 陈述一个命题就是要求证明它。用黑体数字编号的习题是比较难的，再加上一个星号的习题是最困难的。

3. G 的每一条线在某个 G_i 中。

(摩霍柏迪(Mukhopadhyay) [M18])

2.8 一个有限度量空间(S, d)同构于某个图的距离空间当且仅当：

1) S 的任意两个点之间的距离是一个整数；

2) 若 $d(u, v)\geqslant 2$，则有第三个点 w，使得 $d(u, w)+d(w, v)=d(u, v)$。

(凯(Kay)和夏特朗(Chartrand) [KC1])

2.9 在一个连通图中，任何两条最长的道路有一个公共点。

2.10 下述命题不真：在每一个连通图中，所有最长的道路有一个公共点。验证图 2.20 表明这一点。

(沃塞尔(Walther) [W4])

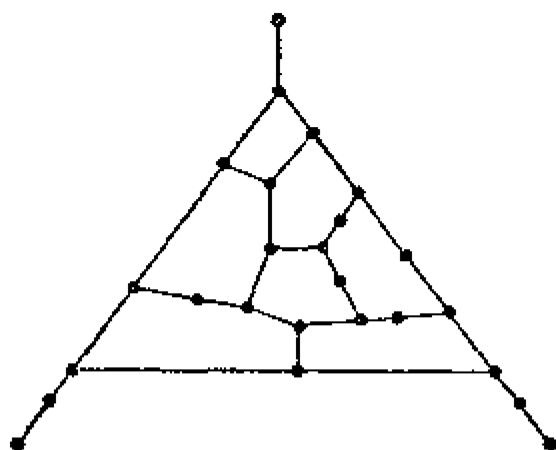


图 **2.20** 习题 2.10 的一个反例。

2.11 每一个直径为 d 和围长为 $2d+1$ 的图是正则的。

(辛格尔顿(Singleton) [S13])

2.12 令 G 是一个(p,q)图，它的所有的点的度为 k 或 $k+1$。若 G 有 $p_k>0$ 个度为 k 的点和有 p_{k+1} 个度为 $k+1$ 的点，则 $p_k=(k+1)p-2q$。

2.13 构造一个有 $2n$ 个点 $(n\geqslant 3)$ 而没有三角形的三次图。

2.14 若 G 有 p 个点，$\delta(G)\geqslant(p-1)/2$，则 G 是连通的。

2.15 若 G 不连通，则 $\overline{G}$ 是连通的。

2.16 每一个自补图有 $4n$ 或$4n+1$个点。

2.17 画出有 8 个点的所有 4 个自补图。

2.18 每一个非平凡的自补图的直径为 2 或 3。

(林格尔(Ringel)[R11], 萨克斯(Sachs)[S8])

2.19 拉姆齐数满足循环关系:

$r(m, n) \leqslant r(m-1, n)+r(m, n-1)$。

(厄尔多斯[E4])

2.20 求一个有 p 个点而没有偶数长度的圈的图中线的最多数目。

2.21 找出不含 K_4 的各个极端图。

(托兰[T3])

2.22 每一个$(p, p+4)$图含有两个线不相交的圈。

(厄尔多斯[E3])

2.23 唯一的没有三角形的$(p, [p^2/4])$图是 $K([p/2], \{p/2\})$。

2.24 证明或否定: 有 p 个点而交数最大的唯一的图是 $K([p/2], \{p/2\})$。

2.25 满足下列条件的最小的图是八面体 $\overline{K}_2+C_4$, 这个条件是: 它的每一条线在至少二个三角形中, 但有某条线不在 K_4 中。把这个图构造出来。

(特台西(Tedeschi))

2.26 求 $\omega(K_p)$, $\omega(C_n+K_1)$, $\omega(C_n+C_n)$和 $\omega(\bar{C}_n)$。

2.27 证明或否定:

a) G 的团的数目不超过 $\omega(G)$。

b) G 的团的数目不少于 $\omega(G)$。

2.26 证明在一个有 p 个点的图中, 最多有 $2^{2-s}3^{r+s}$ 个团, 其中 $p-4=3r+s$, $s=0$, 1 或 2。

(穆恩(Moon)和莫舍(Moser)[MM1])

2.29 一个长度为 4 的圈不可能是一个区间图的导出子图。

2.30 令 $s(n)$表示在 n-方体中导出的一个圈中点的最多数

目。验证下表：

n	2	3	4	5
$s(n)$	4	6	8	14

（丹泽(Danzer)和克利(Klee)[DK1]）

2.31　证明或否定：若 G_1 和 G_2 是正则的，则下列各图也是正则的：a) G_1+G_2, b) $G_1\times G_2$, c) $G_1[G_2]$。

2.32　证明或否定：若 G_1 和 G_2 是二部的，则下列各图也是二部的：a) G_1+G_2, b) $G_1\times G_2$, c) $G_1[G_2]$。

2.33　证明或否定：

a) $\overline{G_1+G_2}=\overline{G}_1+\overline{G}_2$;

b) $\overline{G_1\times G_2}=\overline{G}_1\times\overline{G}_2$;

c) $\overline{G_1[G_2]}=\overline{G}_1[\overline{G}_2]$。

2.34　a) 计算下列各个图中圈的数目：(a) C_n+K_1, (b) K_p, (c) $K_{m,n}$。

（哈拉里和曼维尔[HM1]）

b) 这三个图的每一个中，线不相交的圈最多有几个？

（夏特朗，盖勒(Geller)和赫德尼米(Hedetniemi)[CGH2]）

2.35　两个图 G_1 和 G_2 的结合 $G_1\wedge G_2$ 以 $V_1\times V_2$ 为点集，且 $u=(u_1, u_2)$ 和 $v=(v_1, v_2)$ 当且仅当 $u_1 \operatorname{adj} v_1$ 和 $u_2 \operatorname{abj} v_2$ 时邻接。则在 G_1 和 G_2 连通时，当且仅当 $G_1\cong G_2\cong C_{2m+1}$ 时 $G_1\times G_2\cong G_1\wedge G_2$ 成立。

（米勒(Miller)[M11]）

2.36　两个连通图的结合 $G_1\wedge G_2$ 当且仅当 G_1 中或 G_2 中有奇圈时连通。

***2.37**　仅当 $r=2, 3, 7$ 可能还有 57 时，存在一个有 r^2+1 个点而直径等于 2 的 r 度正则图。　（霍夫曼和辛格尔顿[HS1]）

***2.38**　当且仅当图 G 为 K_{2n}, $K_n\times K_2$, $2K_n$, $2C_4$ 或者它们的补图之一时，有 $p=2n$ 个点的图 G 具有性质：对每个 n 个点的集 S，导出子图 $\langle S\rangle$ 与 $\langle V-S\rangle$ 同构。

（凯利(Kelly)和梅里尔(Merriell)[KM1]）

第三章　块

他不仅象他爸爸，
　　简直就是他爸爸本人。
　　　　　　——E· 柏克

有些连通图移去了一个点就不连通了。这种点称为割点。搞清这种点的分布对认识一个连通图的结构很有帮助。有类似的联结性质的线称为桥。一个图中由割点联在一起的各个部分称为它的块。我们先给出这三个概念的特征，然后研究由一个给定的图得出的两个新图：它的块图和割点图。

1. 割点、桥和块

一个图的一个*割点*是这样一个点：移去它以后使剩下的图的支的数目比原来的图有所增加；一条*桥*也是具有类似性质的一条线。于是，如果 v 是一个连通图 G 的一个割点，则 $G-v$ 是不连通的。*不可分图*是连通的，非平凡的而且没有割点的图。图的一个*块*是一个最大的不可分子图。若 G 是不可分的，G 本身常常就称为一个块。

在图 3.1 中，v 是一个割点而 w 不是；x 是一条桥而 y 不是；它的四个块已经分开画出。一个图的每一条线恰在它的一个块中，而且不是孤立点也不是割点的每个点也是这样。此外，G 的任何一个圈上的各条线都属于同一个块。于是特别地，一个图的块将它的线和圈划分成各个组，其中圈看作是线的集。本章的前面三个定理提出这些概念每一个的几个等价条件。

定理 3.1　令 v 是连通图 G 的一个点。下列陈述是等价的：

(1) v 是 G 的一个割点。

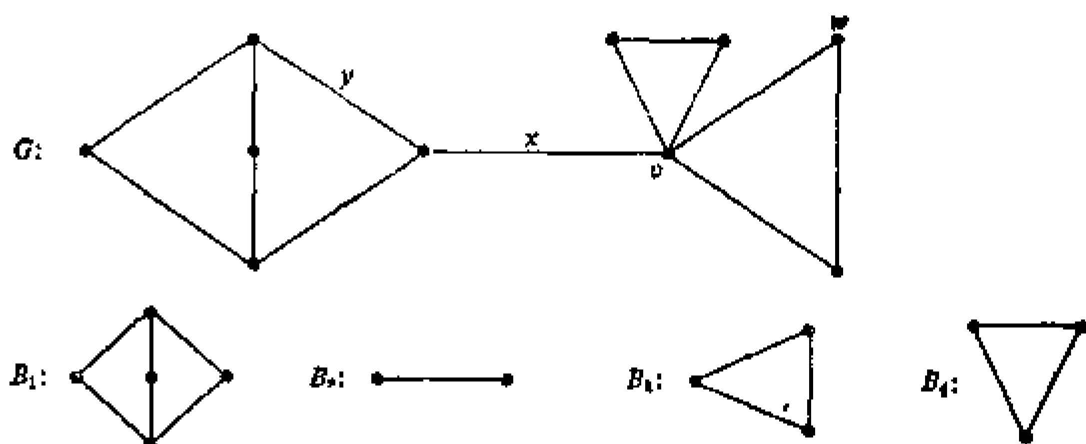


图 3.1 一个图和它的块。

(2) 存在与 v 不同的两个点 u 和 w，使 v 在每一条 u-w 道路上。

(3) 存在一个将点集 $V-\{v\}$ 分成子集 U 和 W 的划分，使对任何两点 $u\in U$ 和 $w\in W$，点 v 在每一条 u-w 道路上。

[证明] (1)蕴含(3)．因为 v 是 G 的一个割点，$G-v$ 是不连通的，它至少有二个支。令 U 由其中一个支的点构成，W 由其余的点构成，从而形成 $V-\{v\}$ 的一个划分。于是任何两点 $u\in U$ 和 $w\in W$ 在 $G-v$ 的不同的支中。因此 G 中每一条 u-w 道路含有 v。

(3)蕴含(2)．因为(2)是(3)的一个特殊情形，所以立即可得。

(2)蕴含(1)．若 v 在 G 中的每一条联结 u 和 w 的道路上，则在 $G-v$ 中不能有一条联结这两个点的道路，从而 $G-v$ 是不连通的，即 v 是 G 的一个割点。

定理 3.2 令 x 是一个连通图 G 的一条线。下列陈述是等价的：

(1) x 是 G 的一条桥。

(2) x 不在 G 的任何一个圈中。

(3) 存在 G 的点 u 和 v，使线 x 在每一条联结 u 和 v 的道路上。

(4) 存在将 V 分成子集 U 和 W 的一个划分，使对任何两点 $u\in U$ 和 $w\in W$，线 x 在每一条联结 u 和 w 的道路上。

定理3.3　令 G 是至少有三个点的一个连通图。下列陈述是等价的：

(1) G 是一个块。

(2) G 的任何两点在一个公共的圈上。

(3) G 的任何一个点和任何一条线在一个公共的圈上。

(4) G 的任何两条线在一个公共的圈上。

(5) 给定 G 的两个点和一条线，存在一条道路联结这两个点并且含有这条线。

(6) 对 G 的每三个不同的点，有一条道路联结其中两个点并且含有第三点。

(7) 对 G 的每三个不同的点，存在一条道路联结其中两个点而不含有第三点。

[证明]　(1)蕴含(2)．令 u 和 v 是 G 的两个不同的点，又令 U 是属于一个含有 u 的圈而与 u 不同的点的集。因为 G 至少有三个点而且没有割点，所以它没有桥；于是每个与 u 邻接的点都在 U 中，所以 U 非空。

假定 v 不在 U 中。令 w 是 U 中的一个点，它使得距离 $d(w, v)$ 最小。令 P_0 是一条最短的 w-v 道路，又令 P_1 和 P_2 是在一个含有 u 和 w 的圈中的两条 u-w 道路(见图3.2a)。

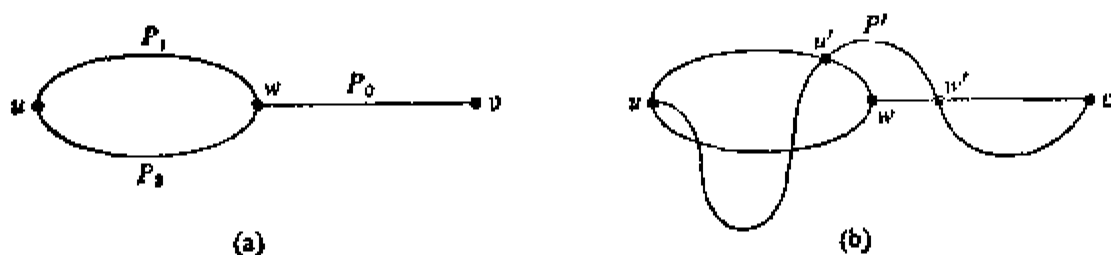


图3.2　块中的道路。

因为 w 不是一个割点，有一条 u-v 道路 P' 不含有 w (见图3.2b)。令 w' 是既在 P' 上又在 P_0 上而且与 u 最近的点，又令 u' 是 P' 的子道路 u-w' 中在 P_1 上或 P_2 上的最后一点。不失一般性，假定 u' 在 P_1 上。

令 Q_1 是由 P_1 的子道路 u-u' 和 P' 的子道路 u'-w' 组成的

u-w' 道路。令 Q_2 是 P_2 后续以 P_0 的子道路 w-w' 组成的 u-w' 道路。则 Q_1 和 Q_2 是不相交的 u-w' 道路。它们合在一起构成一个圈，所以 w' 在 U 中。因为 w' 是在一条最短的 w-v 道路上的，所以 $d(w', v)<d(w, v)$。这与我们对 w 的选法矛盾。从而证明了 u 和 v 确在同一个圈上。

(2) 蕴含 (3)．令 u 是 G 的一个点，又 vw 是 G 的一条线。令 Z 是含有 u 和 v 的一个圈。可以如下构成一个含有 u 和 vw 的圈 Z'。若 w 在 Z 上，则 Z' 由 vw 和 Z 中含有 u 的 v-w 道路组成。若 w 不在 Z 上，有一条 w-u 道路 P 不含有 v，因为否则按定理 3.1，v 就是一个割点。令 u' 是 Z 中属于 P 的第一个点，则 Z' 由 vw 续以 P 的 w-u' 子道路和 Z 中含有 u 的 u'-v 道路组成。

(3) 蕴含 (4)．这个证明与上一段类似，从略。

(4) 蕴含 (5)．G 的任何两点各关联于一条线，且由 (4)，这两条线在一个圈上。从而 G 的任何两个点在一个圈上，于是我们得到 (2)，从而也得到 (3)。令 u 和 v 是 G 的不同的点而 x 是 G 的一条线。由陈述 (3)，有圈 Z_1 含有 u 和 x，圈 Z_2 含有 v 和 x。若 v 在 Z_1 上或 u 在 Z_2 上，显然有一条含有 x 的道路联结 u 和 v。于是我们只要考虑 v 不在 Z_1 上而且 u 不在 Z_2 上的情形。从 u 开始，沿着 Z_1 走，直到到达第一个 Z_2 的点 w，然后取 Z_2 上联结 w 和 v 并且含有 x 的道路。这条通道构成一条联结 u 和 v 并且含有 x 的道路。

(5) 蕴含 (6)．令 u, v 和 w 是 G 的不同的点。又令 x 是任何一条关联于 w 的线。按 (5)，有一条联结 u 和 v 并且含有 x 的道路，从而一定含有 w。

(6) 蕴含 (7)．令 u, v 和 w 是 G 的不同的点。由陈述 (6)，有一条含有 v 的 u-w 道路 P。P 的 u-v 子道路不含有 w。

(7) 蕴含 (1)．由陈述 (7)，对任何两点 u 和 v，没有一个点在每一条 u-v 道路上。从而 G 一定是一个块。

定理 3.4　每一个非平凡的连通图至少有二个点不是割点。

[证明]　令 u 和 v 是在 G 中有最大的距离的两个点。又假

定 v 是一个割点，则有一个点 w，它与 u 在 $G-v$ 的不同的支中。从而 v 在每一条联结 u 和 w 的道路上，所以 $d(u, w)>d(u, v)$，这是不可能的。所以 v，类似地 u，不是 G 的割点。

2. 块图和割点图

从一个图可以导出几个反映它的结构的交图。若我们取 G 的块*作为集的族 F，则交图 $\Omega(F)$ 称为 G 的块图，记作 $B(G)$。G 的块对应于 $B(G)$ 的点，当对应的块含有 G 的一个公共割点时这两个点邻接。另一方面，为了得到一个图，使它的点对应于 G 的割点，我们可以取 S_i 为所有含有割点 v_i 的块的并。得到的交图 $\Omega(F)$ 称为割点图，$C(G)$。于是，若 $C(G)$ 中两个点所对应的 G 的割点在同一个块中，这两个点就邻接。注意，$C(G)$ 只对于至少有一个割点的图 G 定义。这些概念在[H28]中引入，它们可以用图 3.3 来说明。

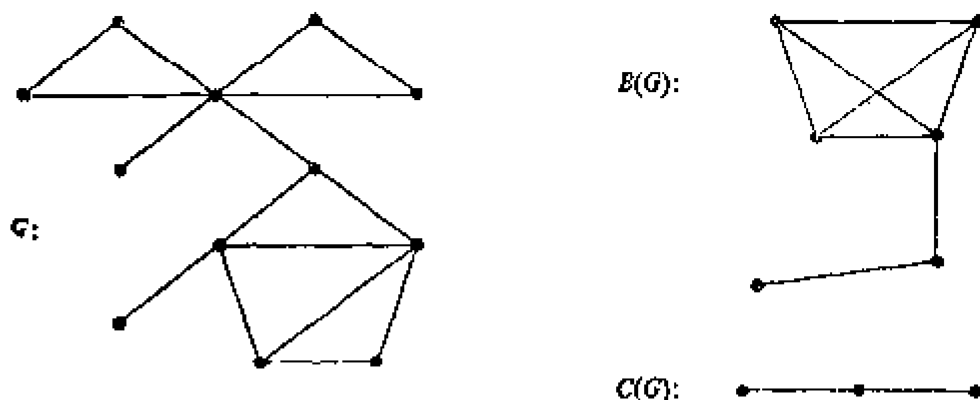


图 3.3　一个图，它的块图和割点图。

定理 3.5　一个图 H 是某个图的块图当且仅当 H 的每一个块是完全的。

[证明]　令 $H=B(G)$，又假定 H 的一个块 H_i 不完全，则 H_i 中有两个点不邻接而在一个长度至少等于 4 的公共圈 Z 上。但是相应于 H_i 中在 Z 上的各点的 G 的各个块的并就是连通而且没有割点的，所以这个并就含在另一个块中，与一个图的块的最

* 每一个块看作它的点的集。——译注

大性矛盾。

另一方面，令 H 是一个给定的图，它的每个块都是完全的，作出 $B(H)$，然后在 $B(H)$ 的每一个点 H_i 上加上一些端线*，它们的数目等于 H_i 中不是 H 的割点的点的数目，这样构成一个新图 G。易见 $B(G)$ 同构于 H。

显然，这同一个准则也给出割点图的特征。

习题

3.1　一个有 p 个点的图中最多有几个割点？

3.2　一个三次图有一个割点当且仅当它有一条桥。

3.3　在一个有一条桥的三次图中至少有 10 个点。

3.4　若 v 是 G 的一个割点，则 v 不是补图 $\bar{G}$ 的一个割点。

（哈拉里[H15]）

3.5　G 的一个点 v 是一个割点当且仅当有邻接于 v 的点 u 和 w，使 v 在每一条 u-w 道路上。

3.6　证明或否定：一个 $p\geq 3$ 的连通图 G 是一个块当且仅当给定任何二个点和一条线，有一条联结这二个点而不含有这条线的道路。

3.7　至少有二条线的一个连通图是一个块当且仅当任何两条邻接的线在一个圈上。

3.8　令 G 是一个至少有 3 个点的连通图。下列陈述是等价的：

(1) G 没有桥。

(2) G 的每二个点在一条公共的闭迹上。

(3) G 的每一个点和一条线在一条公共的闭迹上。

(4) G 的每二条线在一条公共的闭迹上。

(5) 对 G 的每一对点和每一条线，有一条联结这两个点而且含有这条线的迹。

(6) 对 G 的每一对点和每一条线，有一条联结这两个点而不

---

* 即一端是 H_i 另一端是一个新加的点的线。——译注

含有这条线的道路。

(7) 对每三个点，有一条联结任何两个点而且含有第三个点的迹。

3.9 若 G 是 $\delta\geqslant 3$ 的一个块，则有一个点 v 使 $G-v$ 也是一个块。 (A. 考戛斯(Kaugars))

3.10 每一个非平凡连通图的平方是一个块。

3.11 若 G 是至少有一个割点的连通图，则 $B(B(G))$ 同构于 $C(G)$。

3.12 在一个连通图 G 中，令 $b(v)$ 是点 v 所属的块的数目，则 G 的块的数目由下式给出：

$$b(G)-1=\sum[b(v)-1]。$$

(哈拉里[H22])

3.13 令 $c(B)$ 是一个连通图 G 的块 B 的点中割点的数目。则 G 的割点的数目由下式给出：

$$c(G)-1=\sum[c(B)-1]。$$

(加莱(Gallai)[G3])

3.14 一个块 G 是线临界的，若每一个子图 $G-x$ 不是一个块。G 的一条对角线是一条线，它联结不含这条线的一个圈上的两个点。令 G 是 $p\geqslant 4$ 的一个线临界块，则

a) G 没有对角线。

b) G 不含有三角形。

c) $p\leqslant q\leqslant 2p-4$。

d) 如果 G 不是一个圈，移去所有度等于 2 的点产生一个不连通图。 (普卢默(Plummer)[P4])

第四章　树

诗是象我这种笨蛋作的，
只有上帝才能造出一棵树。
——J·基尔默

有一种简单且重要的图，所有的作者都把它叫作树。树之所以重要，不仅因为它在许多不同的领域中有应用，而且也在于图论本身。它对图论的重要性的一个原因是：树是一种非常简单的图，所以在探讨关于图的一般性猜想时可以首先研究树这种情形。第二章中提到的乌拉姆猜想就是一个例子。

要给出几种定义树的办法。我们还要用几何的术语来研究树的中心性。接着讨论一个自然而然地联系于每一个连通图的树：它的块–割点树。最后，我们看一个图 G 的每一个生成树如何产生 G 的一个独立圈的集。还要提到由每一个生成余树得到的独立余圈的集这一个对偶（补）结构。

1. 树的特征

一个图中如果没有圈就称为*无圈的*。一个*树*是一个连通的无圈图。任何一个没有圈的图称为一个*林*。于是一个林的各个支都是树。有 8 个点的不同的树有 23 种*，它们画在图 4.1 中。我们就要看到，可以用许多种不同的方式来定义树。

定理 4.1　对一个图 G，下列陈述是等价的：

(1) G 是一个树。

(2) G 的任意两个点由唯一的一条道路联结。

* 要人们画出有 8 个点的各个树是很有趣的。有些树常常被遗漏而另一些常常被重复。

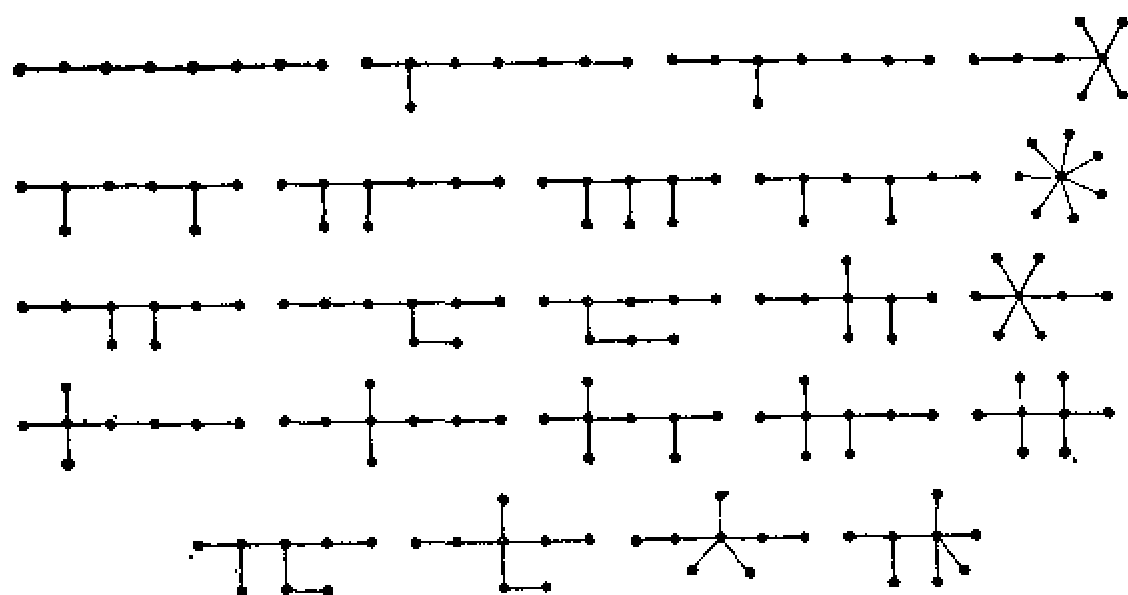


图 4.1　有 8 个点的 23 个树。

(3) G 是连通的，且 $p=q+1$。

(4) G 是无圈的，且 $p=q+1$。

(5) G 是无圈的，且若 G 的任何两个不邻接的点联以一条线 x，则 $G+x$ 恰有一个圈。

(6) G 是连通的，对 $p\geqslant 3$ 不是 K_p，且若 G 的任何两个不邻接的点联以一条线 x，则 $G+x$ 恰有一个圈。

(7) G 不是 $K_3\cup K_1$ 或 $K_3\cup K_2$，$p=q+1$，且若 G 的任何两个不邻接的点联以一条线 x，则 $G+x$ 恰有一个圈。

[证明]　(1)蕴含(2). 因为 G 是连通的，G 中任何两点有一条道路相联结。令 P_1 和 P_2 是 G 中联结 u 和 v 的两条不同的道路，又令 w 是(当我们沿着 P_1 从 u 走向 v 时)第一个具有下列性质的点：它既在 P_1 上又在 P_2 上，但它在 P_1 上的后一个点不在 P_2 上。若我们令 w' 是 P_1 上的下一个既在 P_1 上又在 P_2 上的点，则 P_1 和 P_2 上在 w 和 w' 之间的两条线段* 在一起构成 G 中的一个圈。于是如果 G 是无圈的，则至多有一条道路联结任意两点。

(2)蕴含(3). 显然 G 是连通的。我们用归纳法证明 $p=q+1$。对于只有一个点或二个点的连通图这是显然的。假定命题对于少于 p 个点的图成立。如果 G 有 p 个点，因为道路的唯一性，

* 指子道路。——译注

移去 G 的任何一条线就使得 G 不连通。事实上,这个新的图恰有二个支。由归纳法假设,每一个支中点的数目比线的数目多1, 于是 G 中全部线的数目一定是 $p-1$。

(3)蕴含(4). 假定 G 中有一个长度等于 n 的圈, 则这个圈上有 n 个点和 n 条线。对于那 $p-n$ 个不在这个圈上的点, 每一个点有一条关联于它的线且这条线在联结它与圈上的一个点的测地线上。这种线每一条都不同,所以 $q\geqslant p$, 这是一个矛盾。

(4)蕴含(5). 因为 G 是无圈的, G 的每一个支是一个树。假定有 k 个支,则因为每一个支中点的数目比线的数目多1, $p=q+k$, 所以 $k=1$ 即 G 是连通的。于是 G 是一个树, 且恰有一条道路联结 G 的任意两点。若我们在 G 中再加入一条线 uv, 这条线与 G 中联结 u 和 v 的唯一道路一起构成一个圈。因为这条道路是唯一的,这个圈是唯一的。

(5)蕴含(6). 因为对于 $p\geqslant 3$, 每个 K_p 含有一个圈, G 不可能是一个完全图 K_p, $p\geqslant 3$。图 G 一定是连通的,因为否则可以加入一条线 x 来联结 G 中不同的支的两个点, 而得到的 $G+x$ 是无圈的。

(6)蕴含(7). 我们证明 G 的每两个点都由唯一的一条道路相联结,从而由(2)蕴含(3),可得 $p=q+1$。联结 G 的每两个点的道路一定都存在。若 G 的两个点由两条道路相联结, 由(1)蕴含(2)的证明, G 就有一个圈。这个圈不能有4个或4个以上的点,因为如果有4个或4个以上的点, 则我们取 x 联结圈上两个不邻接的点(如果这个圈上没有不邻接的点, 则 G 本身就有不止一个圈)就可以在 $G+x$ 中得到不止一个圈。于是这个圈是 K_3。这个 K_3 一定是 G 的一个真子图, 因为由假设, G 当 $p\geqslant 3$ 时不是完全图。因为 G 是连通的,我们可以假定 G 中有另外一个点与这个 K_3 中的一个点相联结。于是显然有: 如果 G 中还可以加入线去,则可以加上一条线使得 $G+x$ 中至少形成二个圈, 如果 G 中不能再加入线去,从而对于 G 的第二个条件*显然满足, 则 G 是 K_p 而

* 指 G 中没有不邻接的点。——译注

$p\geqslant 3$,与假设矛盾。

(7)蕴含(1). 若 G 有一个圈,由上一段论证,这个圈一定是三角形且是 G 的一个支。这个支有 3 个点和 3 条线。所有其他各个支一定都是树。为了使 $p=q+1$,只能再有一个支。如果这个树含有一条长度等于 2 的道路,就可以在 G 中再加入一条线 x 使 $G+x$ 中有二个圈。于是这个树必须是 K_1 或 K_2。所以 G 一定是 $K_3\cup K_1$ 或 $K_3\cup K_2$,这两个图我们都已经排斥掉,所以 G 是无圈的。但如果 G 是无圈的,且 $p=q+1$,因为(4)蕴含(5),(5)又蕴含(6),所以 G 是连通的。所以 G 是一个树。证毕。

因为一个非平凡树有 $\sum d_i=2q=2(p-1)$,它至少有二个点的度小于 2。

系 4.1(a) 任何非平凡树至少有二个端点。

这个结果也可以从定理 3.4 得出。

2. 中心和形心

一个连通图 G 中一个点 v 的离心率 $e(v)$ 是对于 G 中所有的 u 取的 $\max d(u, v)$。半径 $r(G)$ 是各个点中最小的离心率。注意,最大的离心率是直径。若对于一个点 v, $e(v)=r(G)$, v 是一个中心点。G 的中心是所有中心点的集。

在图 4.2 的树中,每一个点的离心率都注出来了。这个树直径等于 7,半径等于 4,它有由二个点 u 和 v 组成的中心,这二个点都有最小的离心率 4。u 和 v 邻接这个事实说明了一个由约当*,也独立地由西勒维斯脱发现的结果,见科尼希[K10, P. 64]。

定理 4.2 每一个树有一个由一个点或两个邻接的点组成的中心。

[证明] 这个结果对于树 K_1 和 K_2 是显然的。我们证明任何一个其他的树 T 与移去 T 的所有的端点得到的树 T' 有同样的中心点。显然,由 T 的一个给定点 u 到 T 的任何一个其他的点 v 的距离仅当 v 是一个端点时取到最大值。

* 以约当曲线定理而闻名。

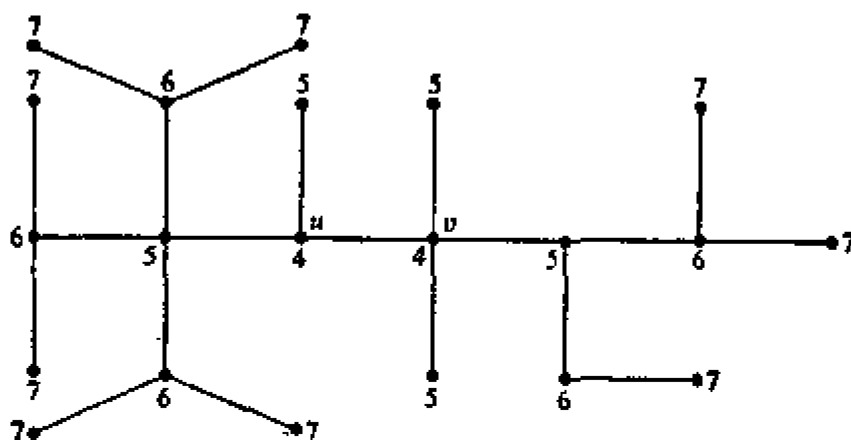


图 4.2　一个树的各点的离心率。

于是，T' 中每一个点的离心率比同一个点在 T 中的离心率恰少 1。从而 T 的在 T 中具有最小离心率的点与在 T' 中具有最小离心率的点相同，也就是说，T 与 T' 有相同的中心。若重复这种移去端点的过程，我们相继得到一些与 T 有相同的中心的树。因为 T 有限，我们最终得到的树是 K_1 或 K_2。在任何情形下，这个最终的树的所有的点构成 T 的中心，从而正好由一个点或两个邻接的点组成。

一个树 T 的在一个点 u 处的分枝是包含 u 作为一个端点的最大的子树。于是，在 u 处的分枝的数目等于 $\deg u$。T 的一个点 u 处的权是 u 处的任何一个分枝中线的最大数目。图 4.3 中的树的非端点处的权都已经注明。当然，在每个端点处的权是 14，即线的总数。

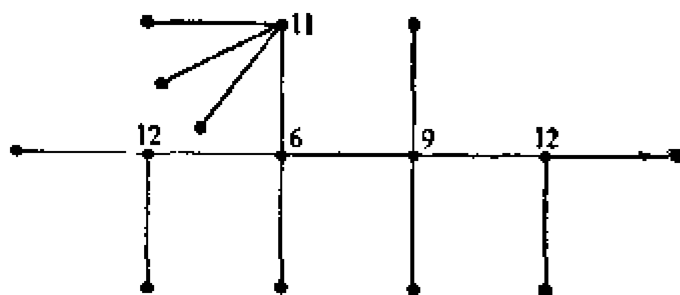


图 4.3　一个树的各个点处的权

一个点 v 如果有最小的权，v 称为是树 T 的形心点。T 的形心由所有形心点组成。约当[J2]也证明了一个关于树的形心的定理，这个定理与他的关于中心的定理类似。

定理4.8 每一个树有一个由一个点或两个邻接的点组成的形心。

图 4.4 中画出有一个或两个中心点或形心点的最小的树。

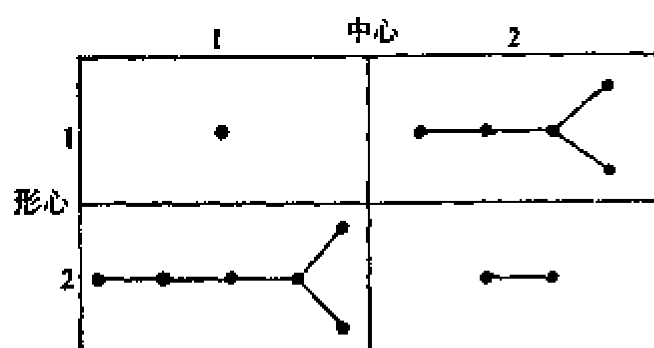


图 4.4 有一个或两个中心点或形心点的各种组合的最小的树。

3. 块-割点树

常常注意到，一个有许多割点的连通图类似于一个树。这种想法可以更确切地说成：对于每一个连通图可以作出一个用来显示这种类似性的树。

对于一个连通图 G，它有块$\{B_i\}$和割点$\{c_j\}$，G 的块-割点图，记作 $bc(G)$，定义为一个图，它有点集$\{B_i\}\cup\{c_j\}$，如果两个点中一

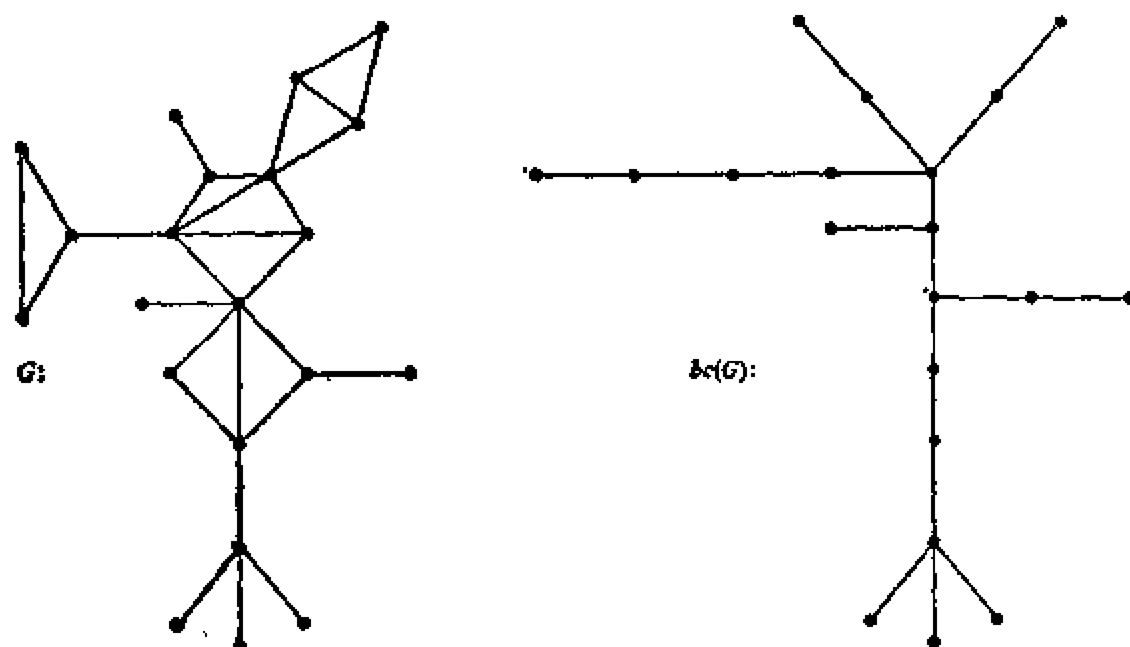


图 4.5 一个图和它的块-割点图。

个对应于一个块 B_i，另一个对应于一个割点 c_j，且 c_j 在 B_i 中，则这两个点邻接。于是 $bc(G)$ 是一个双图。这个概念由哈拉里和普林斯(Prins)[HP22]和加莱[G3]引入。(见图 4.5)

定理 4.4　一个图 G 是某个图 H 的块-割点图当且仅当它是一个树，且在它的任何两个端点之间的距离是偶数。

由这个定理，我们就可以说一个图的块-割点树。

4. 独立圈和余圈

现在我们讲与一个图 G 有关的两个向量空间：它的"圈空间"和"余圈空间"。为了方便起见，我们把这两个向量空间取在二元域 $F_2=\{0, 1\}$ 上，其中 $1+1=0$(虽然这个理论经过修改可使它在任意的域上成立)。特别地，在下列定义中反复出现的 ε_i 总是 0 或 1。

象通常那样，令 G 是一个图，它有点 $v_1, \cdots, v_p$ 和线 $x_1, \cdots, x_q$。点的一个形式的线性组合 $\sum\varepsilon_i v_i$ 称为 G 的一个 0-链，线的一个和 $\sum\varepsilon_i x_i$ 称为一个 1-链。边缘算子 ∂ 是将 1-链变换为 0-链的一个算子，满足

a) ∂ 是线性的。

b) 若 $x=uv$，则 $\partial x=u+v$。

另一方面，上边缘算子 δ 是将 0-链变换为 1-链的一个算子，满足：

a) δ 是线性的。

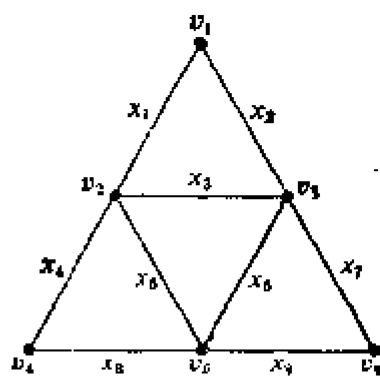


图 4.6　说明边缘算子和上边缘算子的一个图。

b) $\delta v=\sum \varepsilon_i x_i$，此处当 x_i 关联于 v 时 $\varepsilon_i=1$。

在图 4.6 中，1-链 $\sigma_1=x_1+x_2+x_4+x_9$ 有边缘

$$\partial\sigma_1=(v_1+v_2)+(v_1+v_3)+(v_2+v_4)+(v_5+v_6)$$
$$=v_3+v_4+v_5+v_6,$$

0-链 $\sigma_0=v_3+v_4+v_5+v_6$ 有上边缘

$$\delta\sigma_0=(x_2+x_3+x_6+x_7)+(x_4+x_8)+(x_5+x_6+x_8+x_9)$$
$$+(x_7+x_9)=x_2+x_3+x_4+x_5。$$

一个边缘等于 0 的 1-链称为 G 的一个圈向量*，它可以看作一些线不相交的圈组成的一个集。所有圈向量的集构成 F_2 上的一个向量空间，称为 G 的圈空间。G 的一个圈基定义为 G 的圈空间的一个基，而且这个基中每一个元素都是圈。一个圈向量 Z 如果能写成 $\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i Z_i$，我们就说 Z 依赖于圈 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$。于是，G 的一个圈基是 G 的独立圈的一个最大集，或者说成是圈的一个最小的集，使得所有的圈都依赖于它。

一个连通图的一个割集是线的一个集，将这些线移去以后产生一个不连通图。一个余圈是一个最小的割集。G 的一个上边缘是 G 中某个 0-链的上边缘。一个点集 U 的上边缘就是联结 U 中的一个点与不在 U 中的一个点的所有的线的集。于是每一个上边缘是一个割集。因为我们将余圈定义为 G 的一个最小割集，而任何最小的割集都是上边缘，我们看到，一个余圈正好就是一个最小的非零上边缘。G 的所有上边缘的集称为 G 的余圈空间，这个空间的一个全部由余圈组成的基称为 G 的一个余圈基。

我们进一步对 G 的圈空间构造出一个基来，这个基对应于一个生成树 T。在一个连通图 G 中，一个生成树 T 的一条弦是 G 的不在 T 中的一条线。显然，由 T 和 T 的任何一条弦组成的 G 的子图恰有一个圈。而且，这样得到的那些圈的集 $Z(T)$（由每一条弦得到一个圈）是独立的，因为每一个圈中有一条不在其他圈中的线。同时，每个圈 Z 依赖于集 $Z(T)$，因为 Z 是 T 的那些在 Z 中

---

* 大多数拓扑学者和某些图论学者把它称为一个"圈"。对于我们所说的圈，它们称为"回路(circuits)"或"初等圈(elementary cycles)"或"多边形(polygons)"。

的弦所决定的那些圈的对称差。于是，如果我们定义**圈秩** $m(G)$ 是 G 的圈空间的一个基中圈的数目，就有下列结果。

定理 4.5　一个连通图 G 的圈秩等于 G 中任何一个生成树的弦的数目。

系 4.5(a)　若 G 是一个连通的 (p,q) 图，则 $m(G)=q-p+1$。

系 4.5(b)　若 G 是一个有 k 个支的 (p,q) 图，则

$$m(G)=q-p+k。$$

类似的结果对于余圈空间也成立。在一个连通图 G 中，生成树 T 的余树 T^* 是 G 的一个生成子图，它正好含有 G 的不在 T 中的那些线。G 的一个余树是某个生成树 T 的余树。在图 4.7 中，对于与图 4.6 中的图相同的图 G 画出了一个生成树 T 和它的余树 T^*。G 的不在 T^* 中的线称为它的权。G 中由 T^* 和它的任何一条权组成的子图恰含有一个余圈。每次将一条权加到 T^* 中去得到一些余圈，这些余圈的集显然是 G 的余圈空间的一个基。对于图 4.7 中的图 G 和余树 T^*，我们在图 4.8 中说明上述概念，其中用粗线指出余圈。**余圈秩** $m^*(G)$ 是 G 的余圈空间的一个基中余圈的数目。

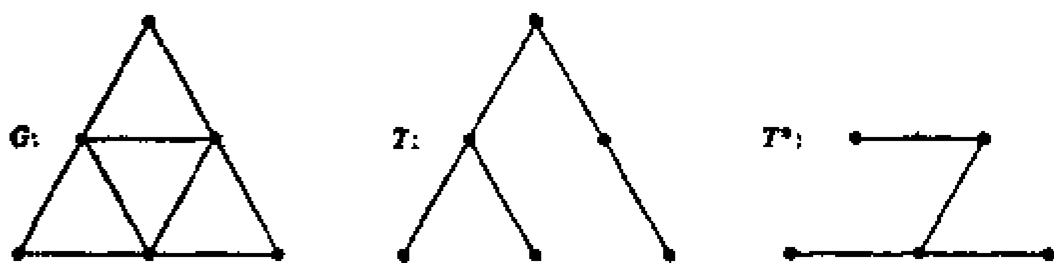


图 4.7　图，树和余树。

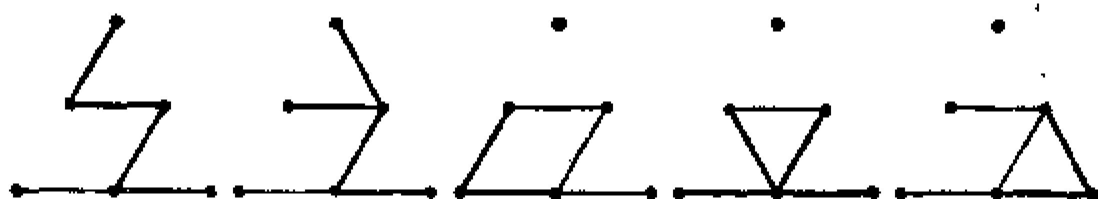


图 4.8　图 4.7 中的 G 的一个余圈基。

定理 4.6　一个连通图 G 的余圈秩是任何一个生成树 T 中权的数目。

和在圈的情形一样，我们有两个直接的推论。

系 4.6(a) 若 G 是一个连通的 (p, q) 图，则 $m^*(G)=p-1$。

系 4.6(b) 若 G 是有 k 个支的 (p, q) 图，则 $m^*(G)=p-k$。

附记

关于单纯复形的一个重要的一般结果的 1 维情形可以由定理 **4.5** 导出。对于每一个单纯复形，欧拉-庞加莱方程

$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\cdots=\beta_0-\beta_1+\beta_2-\cdots$$

成立，其中 β_n 是贝蒂数而 α_n 是每一种维数的单纯形的数目。其中按定义，β_n 是 n 维圈的向量空间的秩。记得第一章中讲过，每一个图是一个单纯复形，它的点是 0-单形，线是 1-单形。对于一个图，$\beta_0=k$ 是连通支的数目，$\beta_1=m(G)$ 是 G 中独立圈的数目。因为图中没有 $n>1$ 的 n-单形，所以对于所有的 $n>1$，$\alpha_n=\beta_n=0$。从而 $\alpha_0-\alpha_1=\beta_0-\beta_1$，即 $p-q=k-m(G)$。我们看到，系 4.5(b)就是图的欧拉-庞加莱方程。

5. 拟阵

拟阵首先是由惠特尼(Whitney)[W15]引入的。在惠特尼的原始论文中可以找到关于拟阵基本性质的讨论和几个等价的公理系统。

一个拟阵由一个有限的元素集 M 和 M 的非空子集的一个族 $\mathscr{C}=\{C_1, C_2, \cdots\}$ 所组成，C_i 称为*回路*，满足公理：

1. 一个回路的真子集不是回路；
2. 若 $x\in C_1\cap C_2$，则 $C_1\cup C_2-\{x\}$ 含有一个回路。

对于每一个图 G，可以定义一个拟阵：取它的线集 X 为集 M，取它的圈为回路。易见两个公理都满足。G 还产生的另外一个拟阵就不那末明显，这个拟阵由取 G 的余圈为回路得到。这两个拟阵分别称为 G 的*圈拟阵*和*余圈拟阵*。

拟阵的另外一个等价的定义如下：一个拟阵由一个有限的元素集 M 和 M 的一族称为*独立集*的子集组成，使

1. 空集是独立的；

2. 独立集的每一个子集是独立的;

3. 对于 M 的每一个子集 A, 所有含在 A 中的极大独立集的元素的数目都相等。

取 G 的线集为集 M, 取 G 的无圈子图为独立集, 在上述意义下, 一个图就产生一个拟阵。

出现在上一节中的对偶性(圈对余圈, 树对余树)与拟阵的对偶性密切有关。明蒂(Minty)[M12]对"拟图"构造了一个明确显示拟阵对偶性的自对偶公理系统。

一个拟图由一个元素集 M 和 M 的非空子集的二个集簇 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 组成, 这两个集的元素分别称为**回路**和**余回路**, 使

1. 对任何一个 $C\in\mathscr{C}$ 和 $D\in\mathscr{D}$, $|C\cap D|\neq 1$;

2. 没有真含另一个回路的回路, 也没有真含另一个余回路的余回路;

3. 不论如何将 M 按如下方式着色: 使恰有一个元素为绿色, 其余元素为红色或蓝色, 则或者

a) 存在一个回路 C 含绿色元素而不含红色元素, 或者

b) 存在一个余回路 D 含绿色元素而不含蓝色元素。

虽然每一个图的圈构成一个拟阵, 但是我们将在第十四章中看到, 并不是每个拟阵都可以这样地由一个图来生成的。两种关于拟阵的综合的参考资料是明蒂[M12]和托特(Tutte)[T19]。

附记

对于任意的一个图, 乌拉姆猜想仍然没有解决, 但凯利[K5]证明了这个猜想对于树是成立的。我们已经说过, 在[H29]中提出的对于这个猜想的观点是: 若对于 G, $p\geqslant 3$, 且 p 个非标定子图 $G_i=G-v_i$ 已经给出, 则图 G 本身可以从 G_i 唯一地重构。[HP6]中推广了凯利的对于树的结果, 那篇文章中证明了, 任何一个非平凡树 T 可以只用那些本身是树的 $T_i=T-v_i$ 来重构, 即 v_i 是 T 的一个端点。接着, 这个结果又为邦迪(Bondy)所改进, 他证明了[B15], 一个树 T 可以从它的那些子图 $T-v_i$ 来重构, 而 v_i 是周

点，即它的离心率等于 T 的直径的那些点。后来，曼维尔(Manvel)[M2]证明了，几乎* 每个树 T 可以只用互不同构的子树 $T-v_i$ 来重构。另外一族图，单圈图，即连通并且恰有一个圈的图，也已经被曼维尔[M3]重构了。

习题

4.1 画出所有有 9 个点的树，然后将你的图解与附录 II 比较。

4.2 每个树是一个双图。什么树是完全双图？

4.3 下列四个陈述是等价的。

(1) G 是一个林。

(2) G 的每一条线是一条桥。

(3) G 的每一个块是 K_2。

(4) 若 G 的两个连通子图的交非空，则这个交是连通的。

4.4 下列四个陈述是等价的。

(1) G 是单圈的。

(2) G 是连通的，且 $p=q$。

(3) 对于 G 的某条线 x，图 $G-x$ 是一个树。

(4) G 是连通的，且 G 中不是桥的各条线的集构成一个圈。

(安德森(Anderson)和哈拉里[AH1])

4.5 对于任何一个连通图 G，$r(G)\leqslant d(G)\leqslant 2r(G)$。

4.6 构造一个树，它有不相交的中心和形心，各有二个点。

4.7 任何一个连通图的中心在一个块中。

(哈拉里和诺曼(Norman)[HN2])

4.8 给定一个连通图 G 的块-割点树 $bc(G)$，画出块图 $B(G)$ 和割点图 $C(G)$。

4.9 求下列图的圈秩：(a) K_p，(b) $K_{m,n}$，(c) 一个有 p 个点的连通三次图。

4.10 一个圈和一个余圈的交含有偶数条线。

* 只有两对例外的树。

4.11 一个图是二部的当且仅当在某个圈基中每个圈是偶的。

4.12 每一个连通图有一个生成树。

4.13 说明如何可以将一个图的块-割点图定义为一个交图。

4.14 一个连通图的一个余树是一个不含有余圈的极大子图。

4.15 $p\geqslant 3$ 的一个树的直径等于 2 当且仅当它是星形图。

4.16 证明或否定：

a）若 G 的直径等于 2，则它有一个生成星形图。

b）若 G 有一个生成星形图，则它的直径等于 2。

4.17 画出所有 $G\cong bc(G)$ 的连通图 G。

*4.18 在一个有 p 个点，半径等于 r 的图中，线的最多数目是

$$\begin{cases} \binom{p}{2}, & \text{若 } r=1; \\ [p(p-2)/2], & \text{若 } r=2; \\ \frac{1}{2}(p^2-4rp+5p+4r^2-6r), & \text{若 } r\geqslant 3。\end{cases}$$

（维津(Vizing)[V5]）

4.19 G 是一个块当且仅当每两条线在一个公共余圈上。

第五章 连 通 性

我们一定要团结起来，否则就
要被一个一个地分别绞死。

——B·富兰克林

图的连通性是图论中特别直观的领域。连通性推广了割点，桥和块的概念。两个称为连通度和线连通度的不变量在决定两个图中哪一个“更加连通”时是有用处的。

有大量的关于连通性的定理，其中有许多是明格尔的经典结果的变形，这个结果中包含有联结一个图中一对点的不相交道路的数目。我们将要看到，这些变形中有几个是在图论以外的其他数学领域中发现的。

1. 连通度和线连通度

一个图 G 的*连通度* $\varkappa=\varkappa(G)$ 是为了产生一个不连通图或平凡图需要移去的点的最少数目。于是一个不连通图的连通度等于0，而有一个割点的连通图其连通度等于1。完全图 K_p 不能因为移去了任何数目的点而成为不连通的，但是移去了 $p-1$ 个点后产生了一个平凡图，所以 $\varkappa(K_p)=p-1$。有时称 $\varkappa$ 为*点连通度*。

类似地，一个图 G 的*线连通度* $\lambda=\lambda(G)$ 是为了产生一个不连通图或平凡图需要移去的线的最少数目。于是 $\lambda(K_1)=0$，一个不连通图的线连通度等于0，而有一条桥的连通图的线连通度等于1。连通度，线连通度与最小度以下面一个属于惠特尼[W11]的不等式相联系。

定理5.1 对于任何一个图 G，

$$\varkappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)。$$

［证明］ 我们首先验证第二个不等式。如果 G 没有线，则 $\lambda=0$；否则，当所有关联于一个具有最小的度的点的线移去以后就产生了一个不连通图。在任何情形下，有 $\lambda\leqslant\delta$。

为了得到第一个不等式，要考虑各种情形。若 G 是不连通的或者平凡的，则 $\varkappa=\lambda=0$。若 G 是连通的且有一条桥 x，则 $\lambda=1$。因为在这种情形下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 是 K_2，所以 $\varkappa=1$。最后假定 G 中有 $\lambda\geqslant2$ 条线，移去它们后 G 就不连通。显然，移去 $\lambda-1$ 条这种线后产生一个图，它有一条桥 $x=uv$。对于这 $\lambda-1$ 条线中的每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的点。这些点移去以后也移去了这 $\lambda-1$ 条线，并且很可能还要更多一些。若这样产生的图是不连通的，则 $\varkappa<\lambda$；否则，x 是一条桥，从而再移去 u 或 v 就产生一个不连通图或平凡图。所以在任何情形下 $\varkappa\leqslant\lambda$。（见图 5.1）

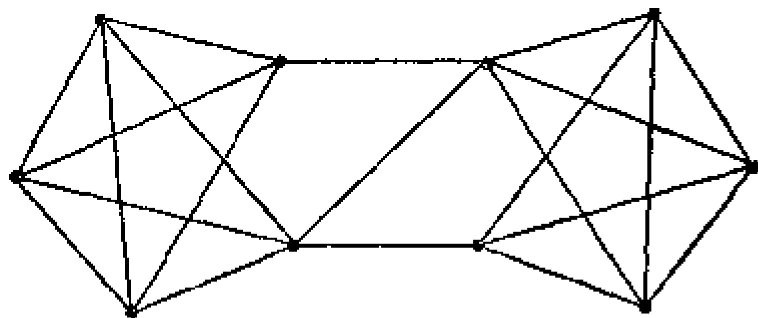


图 5.1 一个图，它有 $\varkappa=2$，$\lambda=3$ 和 $\delta=4$。

夏特朗和哈拉里[CH4]构造了一族图，它们有预先给定的两种连通度，也有一个给定的最小度。这个结果证明了由定理 5.1 加于 $\varkappa$，λ 和 δ 的限制不能再改进了。

定理 5.2 对于全部满足 $0<a\leqslant b\leqslant c$ 的正整数 a，b，c，存在一个图 G，有 $\varkappa(G)=a$，$\lambda(G)=b$ 和 $\delta(G)=c$。

夏特朗[C8]指出，如果 δ 足够大，则定理 5.1 的第二个不等式成为等式。

定理 5.3 若 G 有 p 个点，又 $\delta(G)\geqslant[p/2]$，则 $\lambda(G)=\delta(G)$。

例如，若 G 是 $r\geqslant p/2$ 度正则的，则 $\lambda(G)=r$。特别地，$\lambda(K_p)=p-1$。

对于点连通度不成立类似于定理 5.3 的定理*。求一个有给定数目的点和线的图可能具有的最大连通度的问题由贝尔热[B11]提出，在[H26]中给出了解答。

定理 5.4 在所有有 p 个点和 q 条线的图中，在 $q<p-1$ 时最大的连通度等于 0；在 $q\geqslant p-1$ 时，为 $[2q/p]$。

证明梗概 因为任何一个 (p, q) 图 G 的各点的度的和是 $2q$，平均每点的度等于 $2q/p$。从而 $\delta(G)\leqslant[2q/p]$。所以由定理 5.1，$\varkappa(G)\leqslant[2q/p]$。为了证明这个值实际上可以达到，可以构造出一族适当的图来。这种构造也给出具有最大的线连通度的 (p, q) 图。

系 5.4(a) 一个 (p, q) 图的最大的线连通度等于最大连通度。

移去点和线的一个混合集来使图分离的问题直到最近才有研究。图 G 的一个*连通度对*是非负整数的一个有序对 (a, b)，使得存在某一个有 a 个点和 b 条线**的集，移去它们以后图就不连通了；但是不存在有 $a-1$ 个点和 b 条线的集或有 a 个点 $b-1$ 条线的集具有这种性质。于是，特别是 $(\varkappa, 0)$ 和 $(0, \lambda)$ 这两个有序对是 G 的连通度对。所以连通度对的概念既拓广了图的点连通度也拓广了图的线连通度。不难看出，对于每一个值 a，$0\leqslant a\leqslant\varkappa$，有唯一的连通度对 (a, b_a)；于是，G 恰有 $\varkappa+1$ 个连通度对。

一个图 G 的连通度对决定一个从集 $\{0, 1, \cdots, \varkappa\}$ 到非负整数中的函数 f，且使 $f(\varkappa)=0$（参见定理 5.1）。这个函数称为 G 的*连通度函数*，它是严格递减的，因为若 (a, b) 是一个连通度对而 $b>0$，显然有一个有 $a+1$ 个点和 $b-1$ 条线的集，移去它们后使图不连通或只余下一个点。拜内克(Beineke)和哈拉里[BH6]构造性地证明的下述定理表明，上面所说的条件是一个连通度函数必须满足的唯一条件。

定理 5.5 每个由 $\{0, 1, \cdots, \varkappa\}$ 到非负整数中的递减函数 f，

---

* 事实上，若 $\delta\geqslant p-2$，$\varkappa=\delta$；若 $\delta<p-2$，必存在一个图 G，使 $\varkappa<\delta$。——译注

** 这 b 条线的每一条都不关联于前面的 a 个点中的任何一个。——译注

$f(\varkappa)=0$，是某个图的连通度函数。

若 $\varkappa(G)\geqslant n$，称图 G 是 n-连通的；若 $\lambda(G)\geqslant n$，G 是 n-线连通的。我们注意到，一个非平凡图是1-连通的当且仅当它是连通的；是2-连通的当且仅当它是一个有不止一条线的块。所以 K_2 是仅有的不是2-连通的块。由定理3.3可得，G 是2-连通的当且仅当 G 的任何两个点在一个圈上。迪拉克(Dirac) [D8]将这个结果推广到 n-连通图。

定理5.6 若 G 是 n-连通的，$n\geqslant 2$，则 G 的任何一个有 n 个点的集在一个圈上。

取 G 为圈 C_n 本身，可知 $n>2$ 时这个定理的逆定理不成立。

3-连通图的特征也可以给出，然而说起来就不是那末容易。为了提出这个结果，我们需要由卓越的图论学者W.T.托特首创的"轮形图"的概念。对于 $n\geqslant 4$，轮形图 W_n 定义为图 K_1+C_{n-1}。(见图5.2)

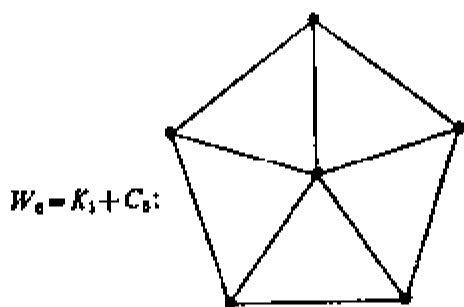


图5.2 一个轮形图。

托特给出3-连通图的特征的定理[T13]。现在可以叙述如下。

定理5.7 一个图 G 是3-连通的当且仅当 G 是一个轮形图，或者可以由一个轮形图通过一系列下列两种运算得到：

1．加上一条新的线。

2．将一个度至少等于4的点 v 代以两个邻接的点 v'，v''，使以前联结于 v 的点恰与 v' 和 v'' 之一联结，并且使得到的图中 $\deg v'\geqslant 3$ 和 $\deg v''\geqslant 3$。

图5.3中的图 G 是3-连通的，因为它可以由轮形图 W_5 通过所画出的步骤来得到。

一个图 G 的一个 n-支是一个最大的 n-连通子图。特别地，G 的1-支是 G 的非平凡支，2-支是至少有3个点的块。不难看出，两个不同的1-支没有公共点，而两个不同的2-支至多在一个点处接触。哈拉里和科达马(Kodama) [HK1]推广了这个事实(见图5.4)。

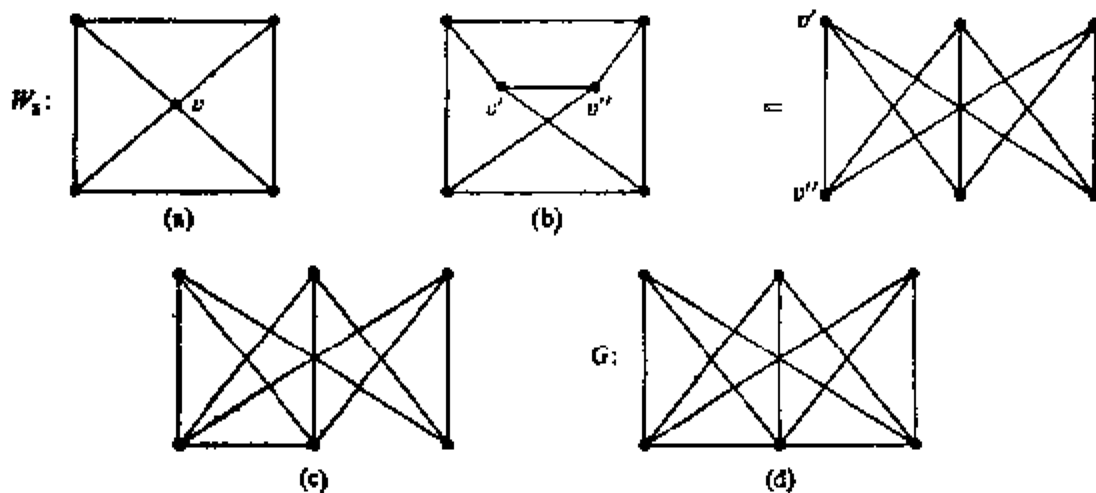


图 5.3　说明一个图是 3-连通的。

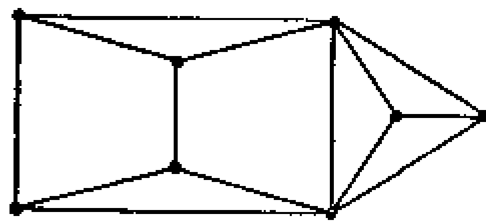


图 5.4　一个图，它有两个在两个点处接触的 3-支。

定理 5.8　一个图 G 的两个不同的 n-支至多有 $n-1$ 个公共点。

2. 明格尔定理的图的形式

1927 年，明格尔(Menger)[M9] 证明了一个图的连通度与联结图中不同的点的不相交道路的数目有关。现有的明格尔定理的各种变形和推广中有许多具有图的形式。我们在这里讨论其中的一部分，我们强调了这些定理所取的形式，使得对于将它们进行分类具有启发性。

令 u 和 v 是一个连通图 G 的两个不同的点。两条联结 u 和 v 的道路如果除了 u 和 v 外没有公共点(从而没有公共线)就称为是不相交的(有时称为点不相交的)；如果它们没有公共线，就称为是线不相交的。一个点集或者一个线集或者点和线的一个集 S，如果 u 和 v 在 $G-S$ 的不同的支中，就称它分离 u 和 v。显然，不存

在分离两个邻接的点的点集。明格尔定理最早是以"点的形式"提出的，如下述的定理 5.9。

定理 5.9　分离两个不邻接的点 s 和 t 的点的最少数目等于不相交的 s-t 道路的最多数目。

[证明]　我们用迪拉克[D11]的巧妙办法来证明。显然，如果 k 个点分离 s 和 t，不能有多于 k 条不相交道路联结 s 和 t。

还要证明若 G 中要 k 个点来分离 s 和 t，则 G 中有 k 条不相交的 s-t 道路。若 $k=1$，当然是成立的。假定对某个 $k>1$ 所说不成立，令 h 是最小的这种 k。令 F 是有最少数目的点的一个图，使它对于 h，定理不成立。我们从 F 中移去一些线，直到得到一个图 G，使在 G 中分离 s 和 t 需要 h 个点，但是对于 G 中的任何一条线 x，在 $G-x$ 中分离 s 和 t 只要 $h-1$ 个点。我们首先探讨这个图 G 的性质，然后再完成定理的证明。

按照 G 的定义，对于 G 中的任何一条线 x，存在一个有 $h-1$ 个点的集 $S(x)$，它在 $G-x$ 中分离 s 和 t。现在，因为在 G 中分离 s 和 t 需要 h 个点，所以 $G-S(x)$ 中至少含有一条 s-t 道路。因为这种道路在 $G-x$ 中就不是一条道路，所以每一条这种道路一定含有线 $x=uv$。从而 $u, v\notin S(x)$，且若 $u\neq s$、t，则 $S(x)\cup\{u\}$ 在 G 中分离 s 和 t。

若有一个点 w 在 G 中与 s 和 t 都邻接，则在 $G-w$ 中需要 $h-1$ 个点来分离 s 和 t，所以其中有 $h-1$ 条不相交的 $s-t$ 道路。把 w 放回去，我们就在 G 中得到 h 条不相交的 $s-t$ 道路。所以我们已经证明了：

(I)　在 G 中没有与 s 和 t 都邻接的点。

令 W 是 G 中分离 s 和 t 的有 h 个点的任何一个集。一条 s-W 道路是联结 s 和某个 $w_i\in W$ 而不含有 W 的其余的点的一条道路。将所有 $s-W$ 道路的集和所有 W-t 道路的集分别称为 P_s 和 P_t。则每一条 s-t 道路都以 P_s 中的一条道路开始而以 P_t 中的一条道路结束，因为每一条这种道路都含有 W 的一个点。显然每个 w_i 都在 P_s 和 P_t 的各至少一条道路上，而且，如果某个不在 W

中的点既在一条 s-W 道路上也在一条 W-t 道路上，就有一条没有 W 中的点的 s-t 道路，所以，P_s 中的一条道路和 P_t 中的一条道路只以 W 中的点为公共点而没有其他公共点。最后，或者有 $P_s-W=\{s\}$ 或者有 $P_t-W=\{t\}$*；因为，假如不是这样，将 P_s 加上线 $\{w_1t, w_2t, \cdots\}$ 和 P_t 加上线 $\{sw_1, sw_2, \cdots\}$ 是两个比 G 的点数少的 h-连通图，其中 s 和 t 都是不邻接的，从而其中都有 h 条不相交的 s-t 道路，合并这些道路的 s-W 部分和 W-t 部分，就可以在 G 中构造 h 条不相交的 s-t 道路，得到矛盾。于是我们证明了：

(II) 任何一个分离 s 和 t 的 h 个点的集 W，或者其中每个点都与 s 邻接，或者其中每个点都与 t 邻接。

现在我们可以完成定理的证明了。令 $P=\{s, u_1, u_2, \cdots, t\}$ 是 G 中的一条最短的 s-t 道路。令 $u_1u_2=x$。注意由(I)，$u_2\neq t$。如上面所说构成的 $S(x)=\{v_1, v_2, \cdots, v_{h-1}\}$ 在 $G-x$ 中分离 s 和 t。由(I)，$u_1t\notin G$。所以令 $W=S(x)\cup\{u_1\}$，按(II)，对于一切 i 都有 $sv_i\in G$。于是按(I)，对于一切 i，$v_it\notin G$。如果我们又取 $W=S(x)\cup\{u_2\}$，按(II)有 $su_2\in G$，与我们选 P 为最短的 s-t 道路矛盾。定理证毕。

我们在图 5.5 中画了一个图，它有两个不邻接的点 s 和 t。移去 3 个点就可以分离它们，但是不能再少。按这个定理，不相交的 s-t 道路至多有 3 条。

按年代排列，明格尔定理的第二个变形由惠特尼在论文

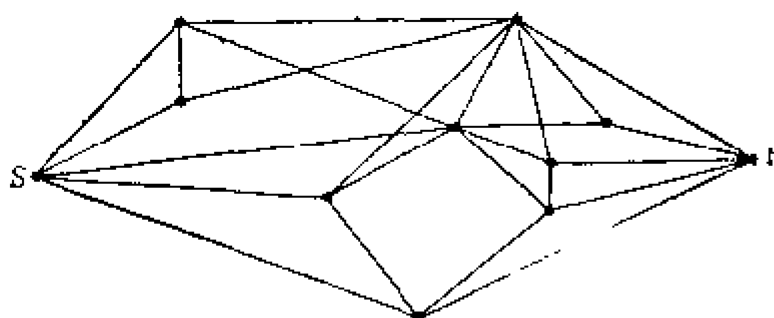


图 5.5　说明明格尔定理的一个图。

---

* 在这两个式中，P_s 和 P_t 分别表示在 P_s 和 P_t 的各条道路上的点的集，而减法是两个集的差。——译注

[W11]中发表，这个定理是决定一个图的 n-连通性的一个准则。

定理 5.10 一个图是 n-连通的当且仅当每一对点由 n 条点不相交的道路所联结。

引进局部连通图的概念就容易说明定理 5.9 与定理 5.10 之间的关系。一个图的两个不邻接的点 u 和 v 的局部连通度，记作 $\varkappa(u, v)$，定义为分离 u 和 v 需要移去的点的最少数目。用这种讲法，明格尔定理断言，对任何两个特定的不邻接的点 u 和 v，$\varkappa(u, v)=\mu_0(u, v)$，$\mu_0(u, v)$是联结 u 和 v 的点不相交的道路的最多数目。显然这两个定理对于完全图都成立。如果对于一个不完全图，则联系定理 5.9 与定理 5.10 的结果是 $\varkappa(G)=\min\varkappa(u, v)$，其中的极小是对所有不邻接的点对 u 和 v 取。

说来奇怪，类似于定理 5.9，用一个线集来分离一对点的定理直到最近才发现。福特和富尔克逊[FF1]（作为他们的“最大流-最小截”定理的一个特殊情形），伊里阿斯(Elias)，范斯坦(Feinstein)和香农(Shannon)[EFS1]在他们的论文中和 A. 科捷格(Kotzig)在他的没有发表的著作中几乎同时地发现了这个结果。

定理 5.11 对于一个图的任何两个点，联结他们的线不相交的道路的最多数目等于分离它们的线的最少数目。

还看图 5.5，我们见到 s 和 t 可以通过移去 5 条线来分离，但是不能再少，而线不相交的 s-t 道路也至多是 5 条。

甚至只要这三个定理，我们就可以看出将这些定理加以分类的办法来。定理 5.9 与定理 5.10 的区别可以表达为：定理 5.9 说的是一个图的两个特定的点，而定理 5.10 是对两个一般的点给出一个界。这种区别与定理 5.9 和定理 5.11 的明显区别都列在表 5.1 中。

表 5.1

定理	分离的对象	最多数目	最少数目
5.9	特定的 u, v	不相交道路	分离 u, v 的点
5.10	一般的 u, v	不相交道路	分离 u, v 的点
5.11	特定的 u, v	线不相交道路	分离 u, v 的线

于是我们看到，不用费力就可以得到明格尔定理的另外一种变形，即将惠特尼的结果用线的形式来表述。

定理 5.12　一个图是 n-线连通的当且仅当每一对点由至少 n 条线不相交的道路所联结。

在明格尔的原始论文中还有下列的关于点的集而不是个别的点的变形。

定理 5.13　对于任何两个不相交的非空点集 V_1 和 V_2，联结 V_1 和 V_2 的不相交道路的最多数目等于分离 V_1 和 V_2 的点的最少数目。

由于与定理 5.9 中同样的理由，当然要限定没有 V_1 的一个点和 V_2 的一个点邻接。两条联结 V_1 和 V_2 的道路，若它们除了端点以外没有公共点，就认为是不相交的。定理 5.9 与定理 5.13 等价性的证明是非常直接的，只要将点集 V_1 和 V_2 缩成单个的点就可以了。

迪拉克[D10]所考虑的下列定理是另外一种变形。因为这个定理的证明中有证明这些变形等价性的一种典型方法，所以我们把它完整地写出来。

定理 5.14　一个有至少 $2n$ 个点的图当且仅当对于任何两个各含有 n 个点的不相交的点集 V_1 和 V_2，存在 n 条联结这两个点集的不相交道路时，这个图是 n-连通的。

注意在这个定理中的 n 条不相交道路没有任何公共点，甚至也没有公共的端点。

[证明]　为了证明条件的充分性，我们再加入两个新的点 w_1 和 w_2，使 w_i 恰与 $V_i(i=1, 2)$ 的各点邻接，从而由 G 构成一个图 G'。(见图 5.6)

因为 G 是 n-连通的，所以 G' 也 n-连通。从而由定理 5.9，有 n 条不相交的道路联结 w_1 和 w_2。将这些道路限制到 G 中，显然就得到我们所需要的 n 条不相交的 V_1-V_2 道路。

为了证明另外的"一半"，令 S 是有至少 $n-1$ 个点的一个集，它将 G 分离为分别有点集 V_1' 和 V_2' 的两个图 G_1 和 G_2。则因为

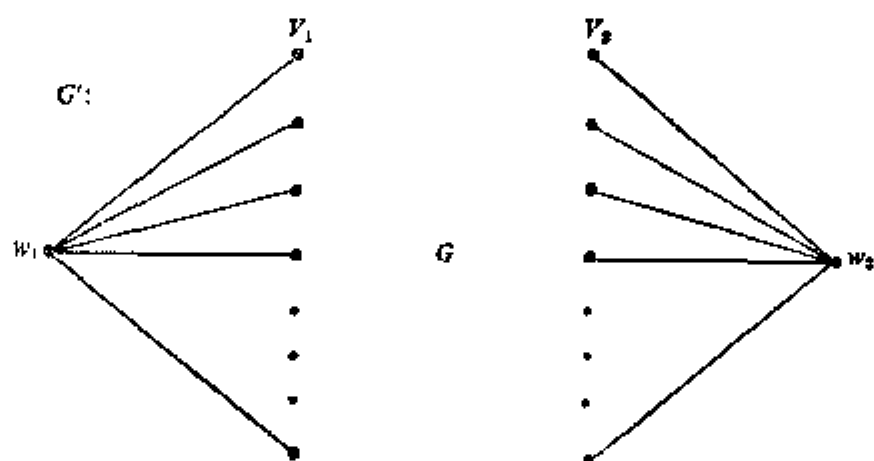


图 5.6　G' 的构造。

$|V_1'|\geqslant 1$, $|V_2'|\geqslant 1$ 和 $|V_1'|+|V_2'|+|S|-|V|\geqslant 2n$, 存在一个划分，它将 S 分成两个不相交的子集 S_1 和 S_2 使 $|V_1'\cup S_1|\geqslant n$ 和 $|V_2'\cup S_2|\geqslant n$。取 $V_1'\cup S_1$ 的任何一个 n-子集 V_1 和 $V_2'\cup S_2$ 的任何一个 n-子集 V_2，我们得到两个各有 n 个点的不相交集。联结 V_1 和 V_2 的每一条道路一定含有 S 的一个点，又因为我们已经知道有 n 条不相交的 V_1-V_2 道路，所以 $|S|\geqslant n$, 即 G 是 n-连通的。

我们已经对于一个图定义了连通度对。类似地，我们可以对一对特定的点 u 和 v 定义连通度对。于是自然而然就要求明格尔定理有含有连通度对的混合形式。下列拜内克和哈拉里[BH6]的定理是一个这种类型的结果；摹仿定理 5.9 的证明就可以证明它。

定理 5.15　有序对 (a, b) 是一个图 G 中点 u 和 v 的连通度对当且仅当存在 a 条点不相交的 u-v 道路和 b 条互相线不相交并且也与前面 a 条道路线不相交的 u-v 道路。面且，这两个数是这种道路可能有的最多数目。

一般地说，我们提到的所有的定理都有相应的有向图形式。事实上，迪拉克指出，他对明格尔定理的证明适用于有向图。据此，我们可以在表 5.1 中再加入 12 个定理，即定理 5.12 到 5.15 和定理 5.9 到定理 5.15 的有向图形式。然而，这样做也没有多大意思，因为这个表显然仍然是远不完备的。为了计算到现在为止已经提出的变形的总数，我们说，可以考虑一个图 G 或一个有向图 D，其中我们可以分离

i) 特定的点 u, v,

ii) 一般的点 u, v,

iii) 两个点集 V_1, V_2(如在定理 5.13 中那样)。

实现这种分离可以移去

i) 点,

ii) 线,或

iii) 点和线(如在定理 5.15 中那样)。

取这些变化的所有可能的组合,我们可以构成 $2\cdot3\cdot3=18$ 个定理。读者可以验证所有这些定理都成立,然而这个练习是很烦琐的。

最后,富尔克逊[F13]证明了下列定理,它用不相交的割集来代替不相交的道路。

定理 5.16 在任何一个图中,分离两个点 u 和 v 的线不相交的线割集的最多数目等于在一条联结 u 和 v 的道路上线的最少数目,即 $d(u, v)$。

虽然这个定理是明格尔型的,但是它远较明格尔定理容易证明。取这个定理的所有可能的变形,象我们对于包含道路的定理所作的那样,我们可以进一步增加明格尔型定理的数目。

3、明格尔定理的其他形式

这一节中,我们再讲几个明格尔定理的变形。它们都是先独立地发现,后来才看出它们互相有关并且可以表达成图论的形式。

一个网络 N 可以看作一个图或一个有向图和一个函数,这个函数对每一条线记以一个正实数。"最大流"和"最小截量"的精确定义见福特和富尔克逊的书[FF2]。

定理 5.17 在任何一个网络 N 中,若有一条从 u 到 v 的道路,则从 u 到 v 的最大流等于最小截量。

在图 5.7 中可以直接验证,在这个网络中从 u 到 v 的最大流是 7,而最小截量也等于 7,但这并不很明显。

在所有的流量是正整数的情形,就象图 5.7 的网络那样,最大

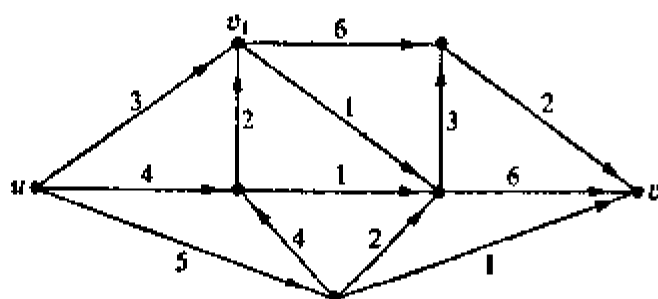


图 5.7　有整数流量的一个网络。

流定理与明格尔定理的一种变形是直接等价的，但出现在明格尔定理的那种变形中的是一个多重有向图 D 和两个特定的点 u 和 v。图 5.8 中画出了表明这种等价性的一个变换。其中，在图 5.7 中由 u 到 v_1 的能力等于 3 的有向线变换为 3 条不指明能力的有向线。

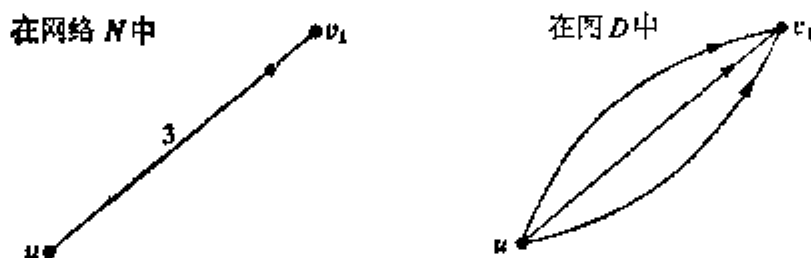


图 5.8　从网络到多重图的变换。

我们定义一个矩阵的一条线是它的一行或一列。在一个二元矩阵(即它的元只取 0 或 1)M 中，线的一个集称为*覆盖* M 的所有单位元，若每个 1 都在这个集的一条线中。M 的两个 1 称为*独立的*，若它们不在同一行中也不在同一列中。科尼希[K9]用这些术语得到了明格尔定理的下列变形；请与定理 10.2 相比较。

定理 5.18　在任何一个二元矩阵中，独立的单位元的最多数目等于覆盖所有单位元的线的最少数目。

$$M=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix},\quad M'=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

我们用上列二元矩阵 M 来说明定理 5.18。M 的所有单位元被第 2 行、第 4 行和第 3 列、第 6 列所覆盖，但是 M 中没有 3 条线的集可以覆盖所有的 1。矩阵 M' 中给出了 M 的 4 个独立的单位元而 M 中没有 5 个独立的 1 的集。

当把这个矩阵看作集对于元素的一个关联矩阵时，定理 5.18 与 P. 霍尔(Hall)[H8]的著名定理密切有关。这个定理为有限集 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 的一个族具有一组不同的代表元素提供了一个判别准则，就是说，有一个不同的元素的集 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，使对于每一个 i，e_i 在 S_i 中。我们在这里给出雷多(Rado)[R1]所作的霍尔定理的证明。

定理 5.19　对于一族不同的集 $S_1, S_2, \cdots, S_m$，存在一组不同的代表元素当且仅当这些集中任何 k 个的并至少包含 k 个元素，k 从 1 到 m 都成立。

[证明]　必要性立即可以得到。对于充分性，我们先证若集 $\{S_i\}$ 满足所述的条件和 $|S_m| \geqslant 2$，则有 S_m 中的一个元素 e 使得集的集 $S_1, S_2, \cdots, S_{m-1}, S_m-\{e\}$ 也满足所述的条件。如果所说不成立，则有 S_m 中的元素 e 和 f，$\{1, 2, \cdots, m-1\}$ 的子集 J 和 K，使

$$\left|\left(\bigcup_{i\in J} S_i\right) \cup (S_m-\{e\})\right| < |J|+1$$

和

$$\left|\left(\bigcup_{i\in K} S_i\right) \cup (S_m-\{f\})\right| < |K|+1。$$

但这样就有

$$\begin{aligned}|J|+|K| &\geqslant \left|\left(\bigcup_J S_i\right) \cup (S_m-\{e\})\right| + \left|\left(\bigcup_K S_i\right) \cup (S_m-\{f\})\right| \\ &\geqslant \left|\left(\bigcup_{J\cup K} S_i\right) \cup S_m\right| + \left|\bigcup_{J\cap K} S_i\right| \\ &\geqslant |J\cup K|+1+|J\cap K| > |J|+|K|,\end{aligned}$$

这是一个矛盾。

现在，充分性可以用对数 $|S_i|$ 中最大的数进行归纳来得到。若每个集都是单元素集，无需证。应用上述结论(必要时多次重复)于阶最大的集就可以逐步进行归纳。

在图 5.9 中，我们给出一个二部图 B，它的点或者代表集 S_i

或者代表元素 a_j。B 的两个点邻接当且仅当其中一个点代表一个集而另一个点代表一个元素而且这个元素属于这个集。在一个象图 5.9 那样的图中引进两个新点就可以将定理 5.19 与明格尔定理联系起来。称这两个新点为 u 和 v，且将 u 与每个代表一个集的点 S_i 联起来，将 v 与每个代表一个元素的点 a_j 联起来，从而得到一个新的图。于是定理 5.19 就可以对这个图用最大流定理或明格尔定理的适当的线形式来证明。

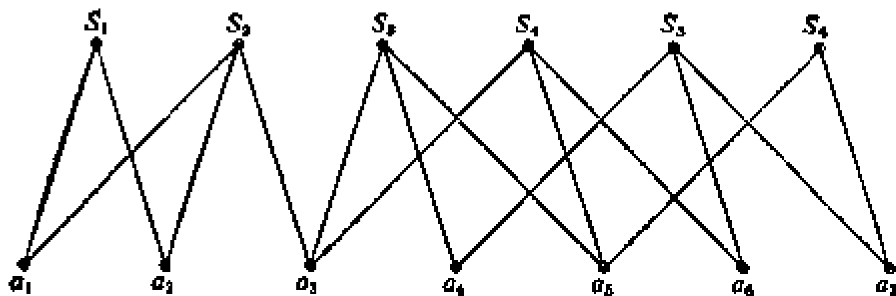


图 5.9 说明霍尔定理的一个二部图。

属于迪尔沃思(Dilworth) [D4]的下列定理虽然是用格论的语言来叙述的*，但已经证明(见米尔斯基(Mirsky)和珀费克特(Perfect) [MP1])这个结果等价于霍尔定理。一个格的两个元素，如果任何一个都不强于另外一个就称为是不可比的(见伯克霍夫(Birkhoff) [B13])。一个格的一条链是指一条在格的"哈塞图解"中从上面的元素到下面的元素的下降道路。

定理 5.20 在任何一个有限格中，不可比元素的最多数目等于用来包含所有元素的链的最少数目。

例如，在 3-方体的格中，至多有 3 个不可比元素；很容易用 3 条链来覆盖所有的元素，但只用二条链就不可能。

这一节中，我们已经见到几个出现在图论以外的领域里的明格尔型定理，对这种结果的一个更广泛的处理见综合文章[H33]。有庞大的文献论及有关不同的代表元素组的各个定理，其中一个巧妙的综合见米尔斯基和珀费克特[MP1]。

* 更一般地，这个结果对半序集成立。

习题

5.1 a) 八面体 $\overline{K}_2+C_4$ 的连通度等于 4。

b) 多边形 C_n 的平方，$n\geqslant 5$，的连通度等于 4。

5.2 每个 n-连通图至少有 $pn/2$ 条线。

5.3 构造一个图，有 $\kappa=3$，$\lambda=4$，$\delta=5$。

5.4 若 $\lambda(G)$ 换成 $\kappa(G)$，定理 5.3 不成立。

5.5 不存在有 7 条线的 3-连通图。

5.6 在每一个三次图中，连通度与线连通度相等。

5.7 问在 4 度正则图中可能出现怎样的连通度对？

5.8 若 G 是 r 度正则的，$\kappa=1$，则 $\lambda\leqslant[r/2]$。

5.9 构造一族 (p, q) 图，$2q/p$ 是整数，使 $\kappa=2q/p$。

5.10 令 G 是一个完全 n 部图但不是 C_4，则每一个最小的线割集是某个点的上边缘。 (M. D. 普卢默)

5.11 求图形 5.5 中的图中 s 和 t 的连通度函数。

5.12 求一个有点 s 和 t 的图，它们的连通度函数是 (0, 5)，(1, 3)，(2, 2)，(3, 0)。

5.13 利用托特定理 5.7 证明方体的图是 3-连通的。

5.14 一个连通图 G 的每一个块是一个轮当且仅当 $q=2p-2$ 且对于任意两个不邻接的点 u，v，$\kappa(u, v)=1$ 或 3。

(博洛伯斯(Bollobás) [B14])

5.15 每一个三次的 3-连通图可以从 K_4 经过下列构造得到：将两条不同的线 u_1v_1 和 u_2v_2（允许 $u_1=u_2$）换成由两个新的点 w_1 和 w_2，新的线 u_1w_1，w_1v_1，u_2w_2，w_2v_2 和 w_1w_2 构成的子图。

5.16 给定联结一个 3-连通图 G 的两个点 u 和 v 的两条不相交的道路 P_1 和 P_2，是不是总可以找到联结 u 和 v 的第三条道路，它与 P_1 和 P_2 都不相交？

5.17 对于联结一个图中两个邻接的点的不相交道路的最多数目，叙述类似于定理 5.9 的结果。

***5.18** 若 $f_r(p)$ 是满足下列条件的最小的数，使得对于 $q\geqslant$

$f_r(p)$，每一个(p, q)图都有由 r 条不相交道路联结的两个点，则

$$f_2(p)=p,\ f_3(p)=[(3p-1)/2] \text{和} f_4(p)=2p-1。$$

（博洛伯斯[B14]）

5.19　若 G 有直径 d 和 $\varkappa\geqslant1$，则 $p\geqslant\varkappa(d-1)+2$。

（沃特金斯(Watkins)[W5]）

5.20　令 ζ 是满足下列的条件的最大的数，使 G 中每一个有 ζ 个点的集含在某个圈中。在一个 3-连通的图 G 中，$\varkappa=\zeta$ 成立当且仅当 G 有 $\varkappa$ 个点的一个集 S，使 $\varkappa(G-S)\geqslant\varkappa+1$。

（沃特金斯[W5]）

5.21　若 G 是连通的，则

$$\varkappa(G)=1+\min_{v\in V}\varkappa(G-v)。$$

5.22　在任何一个图中，分离两个点 u 和 v 的不相交的点割集的最多数目等于 $d(u, v)-1$。

5.23　若一图 G，对每一条线 x 都有 $\varkappa(G-x)<\varkappa(G)$，则称此图为 $\varkappa$-最小图 G：

a) G 是 $\varkappa$-最小的当且仅当对每一对邻接的点 u、v，$\varkappa(u, v)=\varkappa(G)$。

b) 若 G 是 $\varkappa$-最小的，则 $\delta=\varkappa$。　　（海林(Halin)[H5]）

5.24　证明定理 5.18 和 5.19 的等价性(例如见 M. 霍尔[H7, P. 49])。

5.25　若 G 是 n-连通的，$n\geqslant2$ 和 $\delta(G)\geqslant(3n-1)/2$，则 G 中存在一个点 v，使得 $G-v$ 是 n-连通的。

（夏特朗，考夏斯和立克(Lick)[CKL1]）

第六章　划　　分

高卢的国土分成三部分。

——J· 恺撒，《高卢战记》

一个图的各个点的度 $d_1, \cdots, d_p$ 构成一列非负整数，它们的和当然是 $2q$。按照数论中的习惯，一个正整数 n 的一个划分定义为正整数的一个表或者看作一个无序正整数组，这些正整数的和是 n。按这个定义，4 有五种划分：

$$4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1。$$

在一个划分中，加项的次序是不重要的。一个没有孤立点的图各个点的度就决定了 $2q$ 的这样一个划分。但是，因为要有一个对于所有的图都成立的定义，所以比较方便的是使用一个更广泛的定义，即将正整数的要求换为非负整数。

非负整数 n 的一个划分是非负整数的一个有限表，这些非负整数的和是 n。在这种意义下，4 的划分也允许有任意有限数目的零加项。属于一个图的划分是 $2q$ 作为各点的度的和的一种划分。如定理 2.1 所证明，$2q=\sum d_i$。4 划分为正的加项的五种划分中只有二种属于一个图。见图 6.1。

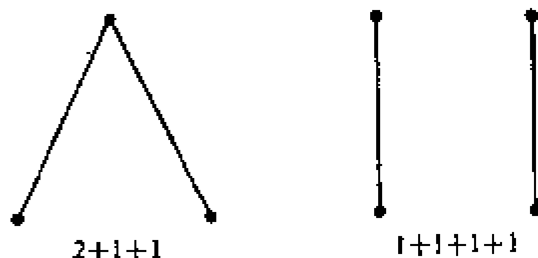


图 6.1　4 的图划分。

若一个图 G 它各点的度为 d_i，则分 n 为 p 个部分的划分 $\sum d_i$ 称为是图划分。若一个划分是图划分，则一定有 $d_i \leqslant p-1$，并且 n 是偶数。这两个条件对于一个划分成为图划分并不是充分的。如划分 $10=3+3+3+1$ 就不是一个图划分。现在引起了二个有关的问题。第一，如何决定一个给定的划分是不是图划

分？第二，对于一个给定的图划分，如何构造这样一个图？对第一个问题的一个存在性的答案由厄尔多斯和加莱[EG1]给出。另一个由哈夫尔(Havel)[H36]和黑克米(Hakimi)[H4]各自独立地发现的答案在本质上是构造性的，所以也回答了第二个问题。我们先给出这个结果。

定理 6.1 分一个偶数为 p 个部分的划分 $\Pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$，$p-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$，是一个图划分当且仅当经过修正后的划分

$$\Pi'=(d_2-1,\ d_3-1,\ \cdots,\ d_{d_1+1}-1,\ d_{d_1+2},\ \cdots,\ d_p)$$

也是图划分。

[证明] 因为由一个有划分 Π' 的图可以由加上一个邻接于度为 d_2-1, d_3-1, $\cdots$, $d_{d_1+1}-1$ 的各点的新点来构成一个有划分 Π 的图，所以，如果 Π' 是图划分，则 Π 也是图划分。

现在令 G 是有划分 Π 的一个图。如果度为 d_1 的一个点邻接于度为 d_i 的各点，$i=2$ 到 d_1+1，则移去这一点就产生一个有划分 Π' 的图。

所以我们只要证明可以由 G 得到有这样的一个点的一个图。我们假定在 G 中点 v_i 的度为 d_i，v_1 是度为 d_1 的一个点，并且与它邻接的各个点的度的和是最大的。如果 v_1 不是与所有 $i=2$ 到 d_1+1 的点 v_i 邻接，则有点 v_i 和 v_j，$d_i>d_j$，使得 v_1v_j 是一条线而 v_1v_i 不是一条线。由于 $d_i>d_j$，有某个点 v_k 与 v_i 邻接而与 v_j 不邻接。移去线 v_1v_j 和 v_kv_i，加上线 v_1v_i 和 v_kv_j，产生另外一个图，在这个图的划分 Π 中，与 v_1 邻接的点的度的和比在 G 中更大。重复这种过程就产生一个图，其中 v_1 有所需要的性质。

这个定理给出了一个有效的算法来从一个划分构成一个图，只要这样的图存在。如果这样的图不存在，算法就在某一步不能应用。

系 6.1(算法)　一个给定的划分 $\Pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$，有

$$p-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p,$$

它是一个图划分当且仅当通过下列步骤产生一个每个加项为零的划分。

1. 求出如定理 6.1 的陈述中所说的经过修正后的划分 Π'。

2. 重新排列 Π' 的项,使它们成为非增的,并且称得到的划分为 Π_1。

3. 和第一步一样,求出 Π_1 的经过修正后的划分 Π'' 和重新排列后的划分 Π_2。

4. 只要得到的是非负加项,就继续这个过程。

若在一个中间阶段得到一个划分已知是图划分,就停止,因为这时候已经知道 Π 本身也是图划分。为说明这个算法,我们试鉴定下列划分:

$$\Pi=(5,\ 5,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2)。$$
$$\Pi'=(\quad 4,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2),$$
$$\Pi_1=(\quad 4,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1),$$
$$\Pi''=(\qquad 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)。$$

显然 Π'' 是图划分,所以 Π 也是图划分。这样构成的图画在图 6.2 中。

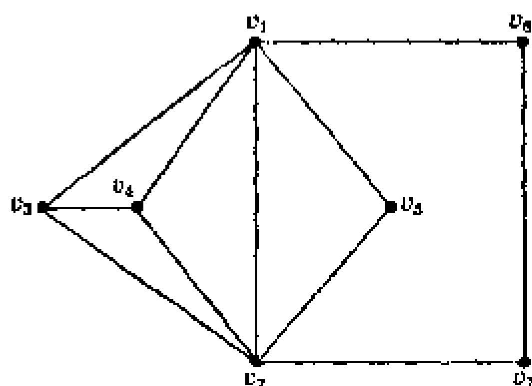


图 6.2 判定是否图划分的算法的一个例。

厄尔多斯和加莱的定理[EG1]本质上是存在性的,但它用同样的构造法来证明。

定理 6.2 令 $\Pi=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_p)$ 是分 $2q$ 为 p 个部分的一个划分,$d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$,则 Π 是图划分当且仅当对每个整数 r,$1\leqslant r\leqslant p-1$,

$$\sum_{i=1}^{r}d_i\leqslant r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{p}\min\{r,\ d_i\}。\qquad(6.1)$$

［证明］　条件(6.1)的必要性立即可以得到如下。给定Π是 $2q$ 的一个属于图 G 的划分，r 个最大的度的和可以看作两部分，第一部分由相应的这 r 个点互相联结的线所给予，第二部分从联结这 r 个点中的一点与其余 $p-r$ 个点中的一个点的线得到。这两部分分别至多为 $r(r-1)$ 与 $\sum\limits_{i=r+1}^{p}\min\{r,\ d_i\}$。

充分性的证明由对 p 进行归纳得到。显然这个结果对于有一个或二个部分的序列成立。假定它对于有 p 个部分的序列成立，又令 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{p+1}$ 是一个满足定理的假设的序列。

令 m 和 n 是最小和最大的整数，使得

$$d^*_{m+1}=\cdots=d_{d_1+1}=\cdots=d_n。$$

构造一个有 p 个项的新序列，令

$$e_i=\begin{cases}d_{i+1}-1, & \text{对 } i=1 \text{ 到 } m-1 \text{ 和 } n-(d_1-m)-1 \text{ 到 } n-1^*;\\ d_{i+1}, & \text{对其余的 } i。\end{cases}$$

若定理的假设对于新的序列 $e_1,\ \cdots,\ e_p$ 成立，则由归纳法假设，有一个图以各个数 e_i 为度。一个有给定的度序列 d_i 的图可以由加上一个度为 d_1 的新点使它邻接于如下的一些点来构成，这些点的度相应于上面在 d_{i+1} 中减去1得到的那些项 e_i。

显然 $p>e_1\geqslant e_2\geqslant\cdots\geqslant e_p$。假定条件(6.1)不成立，又令 h 是使它不成立的 r 的最小值。则

$$\sum_{i=1}^{h}e_i>h(h-1)+\sum_{i=h+1}^{p}\min\{h,\ e_i\}。\tag{6.2}$$

然而下列不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{h+1}d_i\leqslant h(h+1)+\sum_{i=h+2}^{p+1}\min\{h+1,\ d_i\},\tag{6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{h-1}e_i\leqslant(h-1)(h-2)+\sum_{i=h}^{p}\min\{h-1,\ e_i\},\tag{6.4}$$

$$\sum_{i=1}^{h-2}e_i\leqslant(h-2)(h-3)+\sum_{i=h-1}^{p}\min\{h-2,\ e_i\}。\tag{6.5}$$

用 s 记满足 $i\leqslant h$ 且 $e_i=d_{i+1}-1$ 的 i 的个数。则从(6.3)减去

---

* 原书印误。——译注

(6.2)，从(6.2)减去(6.4)，(6.5)，得到

$$d_1+s<2h+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h+1,\ d_{i+1}\}-\min\{h,\ e_i\}),\quad (6.6)$$

$$e_h>2(h-1)-\min\{h-1,\ e_h\}$$
$$+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h,\ e_i\}-\min\{h-1,\ e_i\}),\quad (6.7)$$

$$e_{h-1}+e_h>4h-6-\min\{h-2,\ e_{h-1}\}-\min\{h-2,\ e_h\}$$
$$+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h,\ e_i\}-\min\{h-2,\ e_i\})。\quad (6.8)$$

注意 $e_h\geqslant h$，因为否则不等式(6.7)就给出一个矛盾。令 a，b，c 分别记满足 $i>h$ 而 $e_i>h$，$e_i=h$ 和 $e_i<h$ 的 i 的个数。此外，令 a'，b'，c' 记这些 i 中还满足 $e_i=d_{i+1}-1$ 的个数。则

$$d_1=s+a'+b'+c'。\quad (6.9)$$

不等式(6.6)-(6.8)现在成为

$$d_1+s<2h+a+b'+c',\quad (6.10)$$

$$e_h\geqslant h+a+b.\quad (6.11)$$

$$e_{h-1}+e_h\geqslant 2h-1+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h,\ e_i\}-\min\{h-2,\ e_i\})。\quad (6.12)$$

现在要分几种情形来考虑：

情形 1. $c'=0$。因为 $d_1\geqslant e_h$，我们由(6.11)得

$$h+a+b\leqslant d_1。$$

但结合(6.9)与(6.10)得

$$2d_1<2h+a+a'+2b',$$

这是一个矛盾。

情形 2. $c'>0$，又 $d_{h+1}>h$。就是说，当 $d_{i+1}>h$ 时 $d_{i+1}=e_i+1$*。所以由 $d_{h+1}>h$ 得 $s=h$ 和 $a=a'$。但不等式(6.10)和(6.9)结合蕴含

$$d_1+h<2h+a'+b'+c'-d_1+h,$$

这是一个矛盾。

* 由定义，当 $d_{i+1}>d_{d_1+1}$ 时，$d_{i+1}=e_i+1$。今由 $c'>0$ 知 $e_{n-1}<h$，又 $e_{n-1}=d_n-1$。故 $d_n<h$，即 $d_{d_1+1}<h$。于是，$d_{i+1}>h\geqslant d_{d_1+1}$。即得 $d_{i+1}=e_i+1$。——译注

情形 3. $c'>1$ 和 $d_{h+1}=h$。在这种情形下 $e_h=h$。由(6.11), $a=b=0$; 由(6.9), $d_1=s+c'$。而且,因为 $e_h=d_{h+1}$, 至少有 c' 个 i, $i>h$, 使 $e_i=h-1$*。从而不等式(6.12)蕴含

$$e_{h-1}\geqslant h-1+c'>h,$$

所以 $e_{h-1}=d_h-1$**。从而 $s=h-1$***和由(6.9),

$$d_1=h-1+c'\leqslant e_{h-1}<d_h,$$

这是一个矛盾。

情形 4. $c'=1$ 和 $d_{h+1}=h$。此时仍有 $e_h=h$, $a=b=0$ 和 $d_1=s+c'$。因为 $s\leqslant h-1$, 就有 $d_1=h$。但这蕴含 $s=0$****, 所以 $d_1=1$, 即所有的 $d_i=1$。于是(6.1)就显然满足。这是一个矛盾。

因为 $e_h\geqslant h$ 和 $d_{h+1}\geqslant e_h$, 我们看到, d_{h+1} 不能小于 h。于是所有可能情形都已经考虑过了,定理证毕。

有时,一个划分是不是图划分可以很快地决定。若它是图划分,也可以看出具有这个划分的图的本质。例如,很容易给出一个准则来判定一个划分是不是属于一个树。这个结果回答了奥尔[O5, P. 62]提出的一个问题;这个结果也曾经被独立地得到过好多次。

定理 6.3 一个划分 $2q=\sum_1^p d_i$ 属于一个树当且仅当每个 d_i 是正的,并且 $q=p-1$。

作为一个说明,考虑划分 $16=5+3+2+1+1+1+1+1+1$。

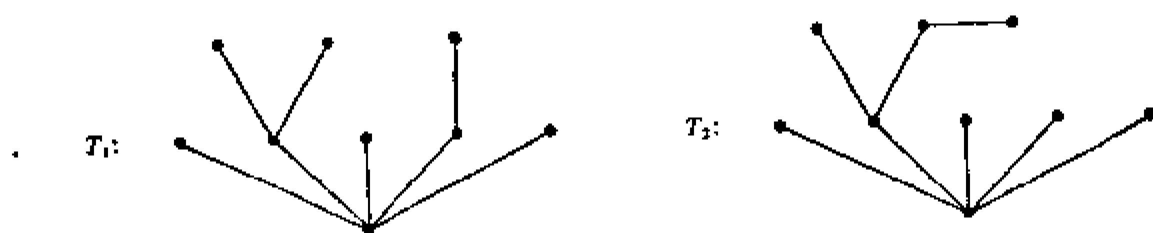


图 6.3　具有同一个划分的两个树。

---

* 由 $c'>1$, 可知 $n>h$; 又由 e_i 的定义可知 $d_{h+1}=d_{h+2}=\cdots=d_n=d_{d_1+1}$。但 $d_{h+1}=e_h=h$, 即 $d_{h+2}=\cdots=d_n=h$。且由 $a=b=0$, $e_{h+1}=\cdots=e_{n-1}=h-1$。——译注

** 见上页的注。

*** 由 $e_{h-1}>h$, 得 $d_h>h$。从而一切 $i<h$, $d_i>h$。即对一切 $i<h$, $d_{i+1}=e_i+1$。——译注

**** 此时 $d_{d_1+1}=d_{h+1}=h=d_1$, 所以 $m+1=1$。按 e_i 的定义,得 $s=0$。——译注

此处，对每个 i, $d_i>0$，且 $q=8$ 而 $p=9$。于是定理 6.3 告诉我们这是一个树的划分。具有这个划分的两个树画在图 6.3 中。

习题

6.1　下列划分哪些是图划分？

a) $4+3+3+3+2+2+2+1$。

b) $8+7+6+5+4+3+2+2+1$。

c) $5+5+5+3+3+3+3+3$。

d) $5+4+3+2+1+1+1+1+1+1+1+1$。

6.2　画出所有有划分 $5+5+3+3+2+2$ 的图。

6.3　划分 $16=5+3+2+1+1+1+1+1+1$ 属于图 6.3 中的每一个树。有没有别的树也具有这个划分？

6.4　构造所有有 6 个点的正则图。

6.5　构造所有的 5 个有 8 个点的连通的三次图；所有的 20 个有 10 个点的连通的三次图。　　(巴拉班(Balaban)[B2])

6.6　没有各个部分都不同的图划分。$p\geqslant 2$ 时，只有二个有 p 个点的图它们的划分中恰有二个部分是相等的，这两个图互补。

(贝扎特(Behzad)和夏特郎[BC3])

6.7　一个图划分是简单的，若只有一个图有这个划分。每一个有 4 个部分的图划分是简单的，不是简单的图划分中所有的部分的最少数目是 5。

6.8　一个划分 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 属于一个伪图（注意，一个环使它所邻接的点的度增加 2）当且仅当 $\sum d_i$ 是偶数。

(黑克米[H4])

6.9　若偶整数 $2q$ 的一个划分具有形式 $\Pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$，而 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$，则 Π 属于某个多重图当且仅当 $q\geqslant d_1$。

(黑克米[H 4])

***6.10**　属于某个多重图的一个划分 Π（见前一个习题）恰属于一个多重图当且仅当至少下列条件之一成立：

1. $p<3$。

2. $d_1=d_2+\cdots+d_p$。

3. $d_1+2=d_2+\cdots+d_p$, 且 $d_2=d_3=\cdots=d_p$。

4. $p=4$ 而 $d_3>d_4=1$。

5. $d_2=\cdots=d_p=1$。

(西尼尔(Senior)[S11],黑克米[H4])

6.11 证明或否定：一个树的划分属于不止一个树当且仅当至少有一个部分大于2，有三个部分大于1，且若大于1的只有三个部分则它们是不相等的。

6.12 令 $\Pi=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$, $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$ 和 $p\geqslant 3$, 是一个图划分。则

a) Π 属于某个连通图当且仅当 $d_p>0$ 和 $\sum d_i\geqslant 2(p-1)$。

b) Π 属于某个块当且仅当 $d_p>1$ 和 $\sum d_i\geqslant 2(p-1+d_1)$。

6.13 如上一个习题中的一个图划分 Π 属于某个 n-线连通图, $n\geqslant 2$, 当且仅当每个 $d_i\geqslant n$。 (埃德莫兹(Edmonds)[E1])

6.14 对于任何一个非平凡图 G, 又对任何一个划分 $p=p_1+p_2$,存在一个划分 $V=V_1\cup V_2$,使 $|V_i|=p_i$ 且 $\Delta(\langle V_1\rangle)+\Delta(\langle V_2\rangle)\leqslant\Delta(G)$。 (洛瓦斯(Lovász)[L4])

第七章 可 行 遍 性

一句谎言会让你走得远远的，
但是不能使你回家。

——佚名

图论的一个特点就在于它在一些难题和游戏中大量表现出来，这个特点曾经促进了一些论题的普及。其中有一种类型常常可以转化成以下这样一个图论问题：在一个图中决定是否存在一条"欧拉迹"或一个"哈密顿圈"。如在第一章中提到过，欧拉图的概念是当欧拉研究哥尼斯堡七桥问题时形成的。我们在本章中要提出欧拉图的两个特征。接着研究哈密顿图，并且给出一个图成为哈密顿图的某些必要条件和充分条件。然而，找哈密顿图的一个简洁而有用的特征，使之不仅仅是定义的一个隐蔽的同义语，这仍然是一个诱人而没有解决的问题。

1. 欧拉图

如我们在第一章中已经看到，欧拉对哥尼斯堡七桥问题的否定解成了图论中第一个公开发表的发现。通过各条桥巡行这个问题可以抽象为一个图论的问题：给定一个图 G，是否可以找到一条通道通过每条线正好一次，从而经过所有的点再回到起点？如果一个图中可以找到这样的一条通道，这个图就称是*欧拉的*。于是，一个欧拉图有一条*欧拉迹*，即一条含有所有的点和线的闭迹。显然，一个欧拉图一定是连通的。

定理 7.1 下列陈述对于一个连通图* G 是等价的：

---

* 这个定理显然对于多重图也成立。

(1) G 是欧拉的。

(2) G 的每个点的度是偶数。

(3) G 的线的集能划分为圈。

[证明] (1)蕴含(2). 令 T 是 G 中的一条欧拉迹。T 中一个给定的点每出现一次用去这个点的度 2, 因为 G 的每条线在 T 中恰出现一次,每个点的度就一定是偶数。

(2)蕴含(3). 因为 G 是连通的和非平凡的, 每个点的度至少是 2, 所以 G 含有一个圈 Z。移去 Z 的各条线产生一个生成子图 G_1, 其中每个点的度仍然是偶数。若 G_1 没有线, 则(3)已经成立;否则,重复应用这种论证于 G_1,产生一个图 G_2, 其中所有的点的度仍然是偶数, 等等。当得到一个全不连通图 G_n 时, 我们就得到将 G 的线分成 n 个圈的一个划分。

(3)蕴含(1). 令 Z_1 是这个划分的一个圈。若 G 仅由这个圈组成, 则 G 显然是欧拉的。否则, 有另外一个圈 Z_2 与 Z_1 有一个公共点 v, 从 v 开始并且由 Z_1 和 Z_2 相继组成的通道是含有这两个圈中各条线的一条闭迹。继续这种过程, 我们可以构成一条含有 G 的所有的线的闭迹;从而 G 是欧拉的。

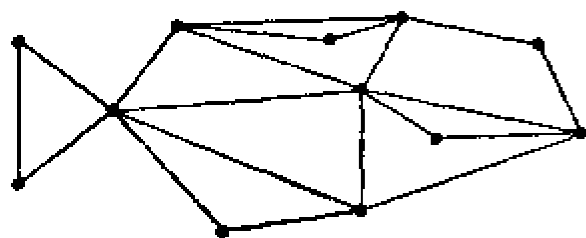


图 7.1 一个欧拉图。

例如图 7.1 中的连通图, 其中每个点的度是偶数, 它有一条欧拉迹, 而且它的线的集可以划分为圈。

由定理 7.1 可得, 若一个连通图 G 没有度为奇数的点, 则 G 有一条闭迹含有 G 的所有的点和线。对于具有一些度为奇数的点的连通图有一个类似的结果。

系 7.1(a) 令 G 是一个连通图, 恰有 $2n$ 个点的度是奇数, $n\geqslant1$, 则 G 的线的集可以划分为 n 条开迹。

系 7.2(b) 令 G 是一个连通图, 恰有二个点的度是奇数, 则 G 有一条开迹, 它含有 G 的所有的点和线(它从一个度是奇数的点开始到另外一个度是奇数的点为止)。

2. 哈密顿图

威廉·哈密顿爵士在探求一个含有十二面体所有顶点的圈的结构时提出了一族以他的名字命名的图。若一个图 G 有一个生成圈 Z，则称 G 为一个哈密顿图，而 Z 是一个哈密顿圈。虽然已经知道几个必要的或充分的条件，但哈密顿图的简洁的特征还没有找到。一个 θ 图是一个块，它有两个度为 3 的不邻接的点，而所有其他的点的度为 2。于是一个 θ 图由两个度为 3 的点和联结它们的三条长度至少为 2 的不相交道路所组成。

定理 7.2 每一个哈密顿图是 2-连通的，每一个非哈密顿的 2-连通图有一个 θ 子图。

在图 7.2 的非哈密顿块中容易找到一个 θ 子图。

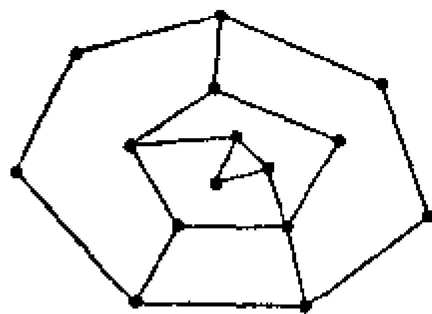


图 7.2 一个非哈密顿块。

由波塞[P7]证明的下列定理给出使一个图成为哈密顿图的一个充分条件。它推广了奥尔和迪拉克的一些较早的结果，这些结果现在作为它的系。

定理 7.3 令图 G 有 $p\geqslant 3$ 个点。若对每一个 n，$1\leqslant n<(p-1)/2$，度不超过 n 的点的数目少于 n，且若对奇的 p，度至多等于 $(p-1)/2$ 的点的数目不超过 $(p-1)/2$，则 G 是哈密顿的。

［证明］ 假定定理不成立。又令 G 是一个有 p 个点且满足定理的假设的最大的非哈密顿图。容易看出，在一个满足定理条件的图中再加入任何一条线产生的图也满足这些条件。于是因为在 G 中加入任何一条线产生一个哈密顿图，任何两个不邻接的点必由一条生成道路相联结。

我们先证明度至少是 $(p-1)/2$ 的每一个点与度大于 $(p-1)/2$ 的每一个点邻接。（不失一般性）假定 $\deg v_1\geqslant(p-1)/2$ 和 $\deg v_p\geqslant p/2$，但 v_1 和 v_p 不邻接。则有一条生成道路 $v_1v_2\cdots v_p$ 联结 v_1 和 v_p。令邻接于 v_1 的点是 $v_{i_1}, \cdots, v_{i_n}$，这里 $n=\deg v_1$，且 $2=i_1<i_2<\cdots<i_n$。显然 v_p 不能邻接于任何一个 v_{i_j-1} 形式的点，因为否

则 G 中就有一个哈密顿圈：

$$v_1v_2\cdots v_{i_j-1}v_pv_{p-1}\cdots v_{i_j}v_1。$$

现在因为 $n\geqslant(p-1)/2$，所以我们有 $p/2\leqslant\deg v_p\leqslant p-1-n<p/2$。而这是不可能的，所以 v_1 和 v_p 必须邻接。

于是可得，若对所有的点 v，$\deg v\geqslant p/2$，则 G 是哈密顿的。(这个结论在下面作为系 7.3(b)来叙述。)因为上述论证蕴含 G 的每一对点均邻接，所以 G 是完全的。但这是一个矛盾，因为对于全部 $p\geqslant3$，K_p 是哈密顿的。

于是在 G 中有一个点 v，有 $\deg v<p/2$。令 m 为所有这种点中最大的度，且选一个点 v_1，使 $\deg v_1=m$。由假设，度不超过 m 的点的数目至多是 $m<p/2$。于是一定有多于 m 个点的度大于 m，从而至少有 $p/2$ 个。于是有某个点，例如 v_p，它的度至少为 $p/2$ 而不与 v_1 邻接。因为 v_1 与 v_p 不邻接，有一条生成道路 $v_1v_2\cdots v_p$。和上面一样，我们将 G 中与 v_1 邻接的点记作 v_{i_1}，…，v_{i_m}，且注意 v_p 不能与 m 个点 v_{i_j-1} 中的任何一个邻接，$1\leqslant j\leqslant m$。但因为 v_1 与 v_p 不邻接，而 v_p 的度至少是 $p/2$，由证明的第一部分，m 一定小于$(p-1)/2$。由假设，度至多为 m 的点的数目少于 m，所以至少在 m 个点 v_{i_j-1} 中有一个点，例如 v' 的度必然至少为 $p/2$。于是我们给出了两个不邻接的点 v_p 和 v'，它们的度都至少为 $p/2$。这个矛盾完成了证明。

这些充分条件并不是必要的。图 7.3 中的三次图 G_1 是哈密顿的，但显然不满足定理的条件。然而，这个定理就下列意义来说是最佳可能的，即将条件再减弱一点就不能作为充分条件。例如，取 $p\geqslant3$ 和 $1\leqslant n<(p-1)/2$。构成图 G_2，它有一个割点和两个块，其中一个块是 K_{n+1} 而另一个块是 K_{p-n}。这个图不是哈密顿的，但它违背定理仅仅在于恰有 n 个点的度为 n。对 $p=8$ 和 $n=3$，这个构造在图 7.3 中作出。若我们取 $p=2n+1$，$n>1$，且构成图 $K_{n,n+1}$，则 G 不是哈密顿的，但它违背定理仅仅在于有$(p-1)/2+1$ 个点的度为$(p-1)/2$。对于 $p=5$，图 7.3 中的图 $G_3=K_{2,3}$ 说明了这个构造。

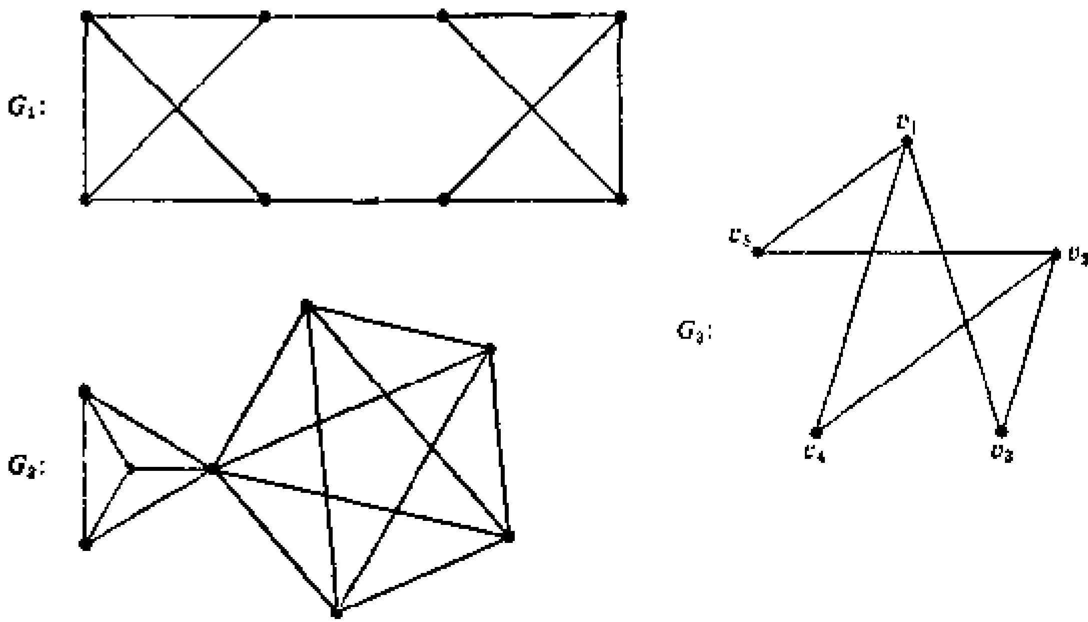


图 7.3 波塞定理的说明。

将波塞定理特殊化，我们得到较简单的但是较不有力的充分条件，它们分别属于奥尔[O3]和迪拉克[D6]。

系 7.3(a) 若 $p \geqslant 3$，且对于每一对不邻接的点 u 和 v，$\deg u + \deg v \geqslant p$，则 G 是哈密顿的。

系 7.3(b) 若对 G 的所有的点 v，$\deg v \geqslant p/2$，其中 $p \geqslant 3$，则 G 是哈密顿的。

事实上，图 7.3 中的三次哈密顿图 G_1 有四个生成圈。最小的三次哈密顿图 K_4 有三个生成圈。这些结果可以作为对于发表在托特的一篇论文[T6]中的 C. A. B. 史密斯(Smith)的定理的说明。

定理 7.4 每一个三次哈密顿图有至少三个生成圈。

泰特(Tait)猜想[T1]，每一个三次的 3-连通可平面图* 含有一个生成圈。托特[T6]以否定的形式解决了这个问题，即证明了图 7.4 中的有 46 个点的 3-连通可平面图不是哈密顿的。

已知的最小的非哈密顿的 3-连通三次可平面图有 38 个点，它由 J. 莱德堡(Lederberg)，J. 博萨克(Bosak)和 D. 巴尼特(Barnette)独立地构成；见格伦鲍姆(Grünbaum) [G10, P. 359]。

欧拉图和哈密顿图之间表面上缺乏任何联系。这可以用图

* 见第十一章关于可平面性的讨论。如果泰特猜想成立，四色猜想也许已经解决。

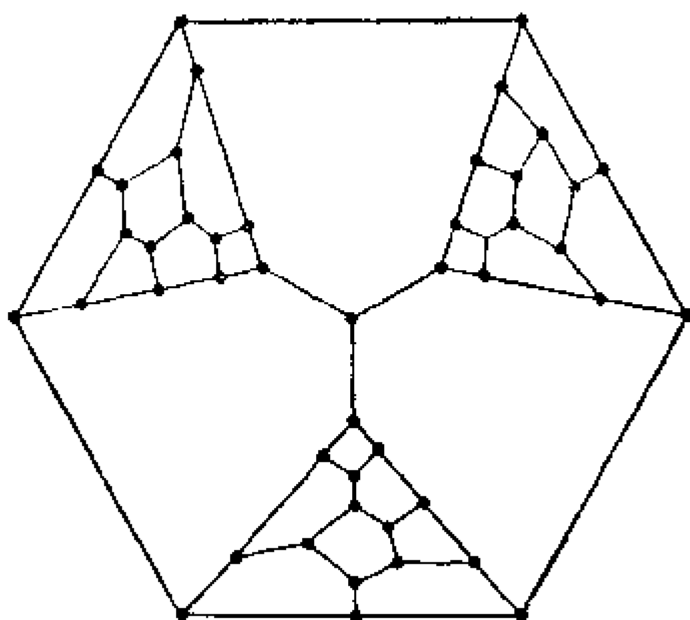


图7.4　托特图。

7.5来说明，其中每个图是有8个点的一个块。然而，在下一章中，我们将利用"线图"的概念来使欧拉图和哈密顿图联系起来。

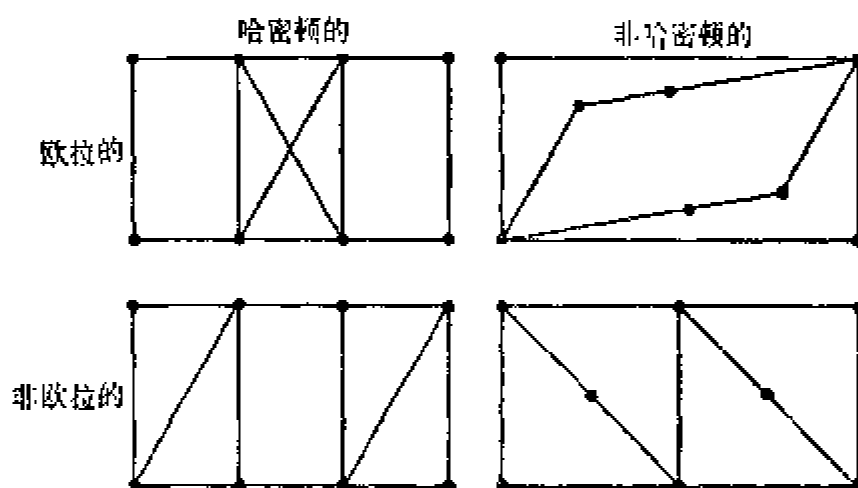


图7.5　欧拉图和(或)哈密顿图。

顺便提到，M. D. 普卢默猜想：每一个2-连通图的平方是哈密顿的。(这已经证明是对的。——译注)

习题

7.1　在图7.1的图G中找一条欧拉迹及一个将G的线分成圈的划分。

7.2　若一个连通图G的每一个块是欧拉的，则G是欧拉的。逆命题也成立。

7.3　在系7.1(a)中，用少于n条迹不能构成划分。叙述和证明系7.1(b)的逆命题。

7.4　一个图是可由点v_0任意行遍的，若经过下列步骤总是产生一条欧拉迹：由点v_0出发经过任何一条关联的线，达到一点u后经由任何一条尚未用过的关联线离开，继续下去直到用遍所有的线。

a）一个欧拉图是可由v_0任意行遍的当且仅当每个圈含有v_0。　(奥尔[O2])

b）若G是可由v_0任意行遍的，则v_0有最大的度。

(巴布拉(Bäbler)[B1])

c）若G是可由v_0任意行遍的，则或者v_0是唯一的割点，或者G没有割点。　(哈拉里[H17])

7.5　证明或否定：若一个图G含有一个导出θ子图，则G不是哈密顿的。

7.6　a）对任何一个非平凡的连通图G，G^3的每一对点由一条生成道路相联结。从而当$p\geqslant3$时G^3的每一条线在一个哈密顿圈中。　(卡拉甘尼斯(Karaganis)[K2])

b）若G的每一对点由一条生成道路联结，且$p\geqslant4$，则G是3-连通的。

7.7　给出一个有10个点的非哈密顿图的例子，使对每一对不邻接的点u和v，$\deg u+\deg v\geqslant9$。

7.8　在完全双图$K_{3,3}$和$K_{4,3}$中有多少生成圈？

7.9　一个图G称为随意可溯的[随意哈密顿的]，若一条生成道路[哈密顿圈]总是可以如下产生：从G的任何一个点出发，然后进到任何一个还没有选过的邻接点，直到没有新的点可以利用。

a）一个有$p\geqslant3$个点的图G是随意可溯的当且仅当它是随意哈密顿的。

b）一个有$p\geqslant3$个点的图G是随意可溯的当且仅当它是图C_p、K_p或$K_{n,n}$之一，$p=2n$。

(夏特朗和克朗克(Kronk)[CK1])

7.10 定理 7.3 可以看作对一个图是 2-连通的给出了充分条件。这可以推广到 n-连通图的情形。

令 G 是非平凡的，又令 $1<n<p$。下列条件是使 G 成为 n-连通的充分条件：

1）对任何一个使 $n-1\leqslant k<(p+n-3)/2$ 的 k，度不超过 k 的点的数目不超过 $k+1-n$。

2）度不超过 $(p+n-3)/2$ 的点的数目不超过 $p-n$。

（夏特朗，卡普尔(Kapoor)和克朗克[CKK1]）

7.11 波塞定理也可以以另外一种方式推广。

令 G 有 $p\geqslant 3$ 个点，又令 $0\leqslant k\leqslant p-2$。若对每一个有 $k+1\leqslant i<(p+k)/2$ 的整数 i，度不超过 i 的点的数目少于 $i-k$，则每一条长度为 k 的道路含在一个哈密顿圈中。（克朗克[K13]）

7.12 记得若在两个标定图之间存在一个保持标号的同构则这两个标定图是同构的。一个 e 图是指一个图，其中每一个点的度是偶数。

a）有 p 个点的标定图的数目是 $2^{p(p-1)/2}$。

b）有 p 个点的标定 e-图的数目等于有 $p-1$ 个点的标定图的数目。（R. W. 鲁宾逊(Robinson)）

7.13 若 G 是一个 (p, q) 图，而 $p\geqslant 3$ 及 $q\geqslant(p^2-3p+6)/2$，则 G 是哈密顿的。（奥尔[O4]）

7.14 若对 G 的任何两个不相邻接的点 u 和 v，$\deg u+\deg v\geqslant p+1$，则联结每一对不同的点有一条生成道路。

（奥尔[O6]）

7.15 若 G 是一个有 $p\geqslant 3$ 个点的图，使移去任何一个至多有 n 个点的集产生一个哈密顿图，则 G 是 $(n+2)$-连通的。

（夏特朗，卡普尔和克朗克[CKK1]）

7.16 考虑非哈密顿图 G，使每一个子图 $G-v$ 是哈密顿的。恰有一个这样的有 10 个点的图而没有更小的图。

（高丁(Gaudin)，赫茨(Herz)和罗西(Rossi)[GHR1]）

7.17 是否存在具有任意高连通度的非哈密顿图？

第八章　线　　图

直线是两点之间的最短距离。

——欧几里得

一个给定的图的线图的概念是如此自然，以致它被许多作者独立地得到过。当然，每个人给它取的名字都不同*：奥尔 [O5] 称它们为"交换图"，赛别度西 [S7] 称为"导图"，拜内克 [B8] 称为"导出图"，塞舒 (Seshu) 和里德 (Reed) [SR1] 称为"边-顶点对偶"，卡斯特莱因 (Kasteleyn) [K4] 称为"覆盖图"，门农 (Menon) [M10] 称为"依附图"。我们本章要导出线图的各种特征，也引进首先由贝扎特 [B4] 研究的全图，因为这种图在历史上仅贝扎特一人发现过，所以没有其他的名字。我们要研究线图和全图的关系，并且特别着重欧拉图和哈密顿图。

1. 线图的一些性质

将一个图 G 的线的集 X 看作 $V(G)$ 的 2 点子集的一个族。G 的线图，记作 $L(G)$，是交图 $\Omega(X)$。于是，$L(G)$ 的点是 G 的线，当 G 中相应的线邻接时 $L(G)$ 的两个点邻接。若 $x=uv$ 是 G 的一条线，则 x 在 $L(G)$ 中的度显然是 $\deg u+\deg v-2$。图和它的线图的两个例子在图 8.1 中给出。注意在这个图中，$G_2=L(G_1)$。所以 $L(G_2)=L(L(G_1))$。我们记 $L^1(G)=L(G)$，$L^2(G)=L(L(G))$，一般地，迭线图是 $L^n(G)=L(L^{n-1}(G))$。

作为 $L(G)$ 定义的一个直接推论，我们注意，$L(G)$ 的每一个割点是 G 的一条不是端线的桥。逆命题也成立。

当定义图的任何一个族时，需要知道在每一个图中点和线的

---

* 惠特尼 [W11] 虽然选用了"边"这个词，但他使用"线图"。惠特尼 [W11] 是第一个发现这种图的人，但他没有给它们取一个名字。

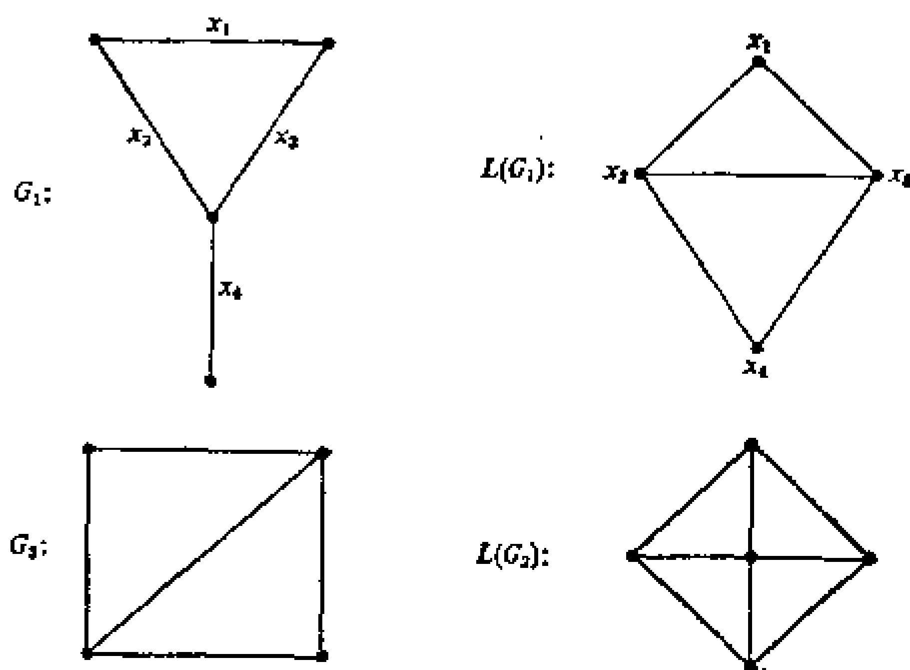


图 **8.1**　图及其线图。

数目；这对于线图是容易决定的。

定理 8.1　若 G 是一个 (p, q) 图，它的各个点的度是 d_i，则 $L(G)$ 中有 q 个点和 q_L 条线，其中

$$q_L = -q + \frac{1}{2}\sum d_i^2。$$

［证明］　由线图的定义，$L(G)$ 有 q 个点。关联于一个点 v_i 的 d_i 条线产生 q_L 中的 $\binom{d_i}{2}$ 条线，所以

$$q_L = \sum\binom{d_i}{2} = \frac{1}{2}\sum d_i(d_i-1) = \frac{1}{2}\sum d_i^2 - \frac{1}{2}\sum d_i = \frac{1}{2}\sum d_i^2 - q。$$

下列结果可以用许多不同的方法证明，依赖于各人的想法。

定理 8.2　一个连通图同构于它的线图当且仅当它是一个圈。

于是对一个(不必连通的)图，$G \cong L(G)$ 当且仅当 G 是 2 度正则的。

若 G_1 和 G_2 是同构的，则显然 $L(G_1)$ 和 $L(G_2)$ 也同构。惠特尼[W11]发现，除了仅有的二个不同的图有相同的线图外，逆命题总是成立的。这里的证明属于荣格(Jung)[J3]。

定理 8.3　令 G 和 G' 是有同构的线图的连通图，除了一个是 K_3 而另一个是 $K_{1,3}$ 外，G 和 G' 同构。

［证明］　先注意在至多有四个点的连通图中，仅有的具有同构的线图的两个不同的图是 K_3 和 $K_{1,3}$。更注意到，若 ϕ 是从 G 到 G' 上的一个同构，则有一个从 $L(G)$ 到 $L(G')$ 上的导出同构 ϕ_1。当证明了下列更强的结果时，定理就得到了证明。

若 G 和 G' 有多于四个点，则任何从 $L(G)$ 到 $L(G')$ 上的同构 ϕ_1 可以由正好一个从 G 到 G' 上的同构导出。

先证明 ϕ_1 至多从一个同构导出。假定存在二个这样的同构，ϕ 和 ψ。我们将证明对于 G 的任何一个点 v，$\phi(v)=\psi(v)$。一定存在两条线 $x=uv$ 和 $y=uw$ 或 vw。若 $y=vw$，则点 $\phi(v)$ 和 $\psi(v)$ 都是既在线 $\phi_1(x)$ 上又在线 $\phi_1(y)$ 上的点，但因为同时在这两条线上的点只有一个，所以 $\phi(v)=\psi(v)$。同理，当 $y=uw$ 时，$\phi(u)=\psi(u)$。因为线 $\phi_1(x)$ 含有两个点 $\phi(v)$ 和 $\phi(u)=\psi(u)$，所以又得到 $\phi(v)=\psi(v)$。因此 ϕ_1 至多从一个 G 到 G' 上的同构导出。

现在证明存在一个同构 ϕ，使 ϕ_1 可以由 ϕ 导出，第一步是证明 G 的一个 $K_{1,3}$ 子图的线 $x_1=uv_1$，$x_2=uv_2$ 和 $x_3=uv_3$ 在 ϕ_1 下一定映到 G' 的一个 $K_{1,3}$ 子图的各条线。令 y 是另外一条与至少一条 x_i 邻接的线，它或者仅与 x_1，x_2，x_3 中的一条线邻接，或者与所有三条线都邻接。对于任何一个 $p\geqslant 5$ 的图一定存在这样的一条线 y，而对于 $p<5$ 定理是平凡的。若三条线 $\phi_1(x_i)$ 形成一个三角形而不是 $K_{1,3}$，则 $\phi_1(y)$ 只能邻接于这三条线中的正好二条。所以每一个 $K_{1,3}$ 一定映到一个 $K_{1,3}$。

令 $S(v)$ 记邻接于 v 的线的集。现在证明对于 G 中的每一点 v，在 G' 中恰有一点 v' 使 $S(v)$ 在 ϕ_1 下映到 $S(v')$。若 $\deg v\geqslant 2$，令 y_1 和 y_2 是 v 处的线而令 v' 是 $\phi_1(y_1)$ 和 $\phi_1(y_2)$ 的公共点。于是对于 v 处的每条线 x，v' 关联于 $\phi_1(x)$，而对于 v' 处的每条线 x'，v 关联于 $\phi_1^{-1}(x')$。若 $\deg v=1$，令 $x=uv$ 是 v 处的线。则 $\deg u\geqslant 2$，从而 $S(u)$ 映到 $S(u')$ 且 $\phi_1(x)=u'v'$。因为对于 v' 处的每一条线 x'，线 $\phi_1^{-1}(x')$ 和 x 一定有一个公共点，所以 u 在 $\phi_1^{-1}(x')$ 上，

从而 u' 在 x' 上。就是说，$x'=\phi_1(x)$，所以 $\deg v'=1$。因为仅当 $u=v$ 时 $S(u)=S(v)$，所以映射 ϕ 是从 V 到 V' 的一一映射。现在在 V' 中给定 v'，有一条关联线 x'。以 uv 记 $\phi_1^{-1}(x')$，则或者 $\phi(u)=v'$ 或者 $\phi(v)=v'$，从而 ϕ 是映于 V' 上的。

最后，我们注意到对于 G 中的每一条线 $x=uv$，$\phi_1(x)=\phi(u)\phi(v)$；又对 G' 中的每一条线 $x'=u'v'$，$\phi_1^{-1}(x')=\phi^{-1}(u')\phi^{-1}(v')$，所以 ϕ 是一个同构，ϕ_1 就由这个同构导出。证毕。

2. 线图的特征

一个图 G 是一个线图，若它同构于某个图 H 的线图 $L(H)$。例如 K_4-x 是一个线图；见图 8.1。另一方面，我们今验证 $K_{1,3}$ 不是一个线图。假定 $K_{1,3}=L(H)$，则因为 $K_{1,3}$ 有四个点，H 就有四条线，且 H 一定是连通的。所有有四条线的连通图都画在图 8.2 中。因为按定理 8.3，$L(C_4)=C_4$ 和 $L(K_{1,3}+x)=K_4-x$（见图 8.1），于是得，H 是三个树中的某一个。但这些树的线图是道路 P_4、图 $K_3\cdot K_2$ 和 K_4，这就证明了 $K_{1,3}$ 不是一个线图。我们将见到，星形图 $K_{1,3}$ 在给出线图的特征方面将起重要的作用。线图的第一个特征是下列定理的陈述 (2)，属于克劳斯 (Krausz) [K12]，它与定义的关系颇为密切。范·罗伊(Van Rooij)和威尔弗 (Wilf) [RW1] 改善了这种情况，他们在(3)中叙述了一个图成为线图的一个结构的准则。最后，拜内克 [B8] 和 N. 罗伯逊

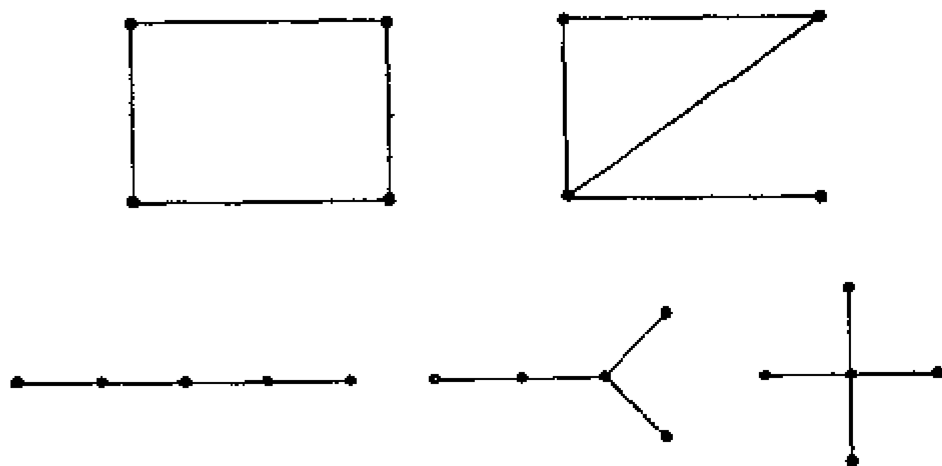


图 8.2　有四条线的连通图。

(Robertson)(未发表)精确地展示了那些不能出现在线图中的子图。要记得一个导出子图是在它的点集上最大的一个子图。一个图 G 的一个三角形 T 称为是奇的,若有 G 的一个点与这个三角形的三个点中奇数个点相邻接。否则,就称为是偶的。

定理 8.4 下列陈述是等价的:

(1) G 是一个线图。

(2) G 的线可以划分为完全子图,且使得没有一个点在两个以上的子图中。

(3) G 不以 $K_{1,3}$ 为一个导出子图,又若两个奇三角形有一条公共线,则它们的各个点的导出子图是 K_4。

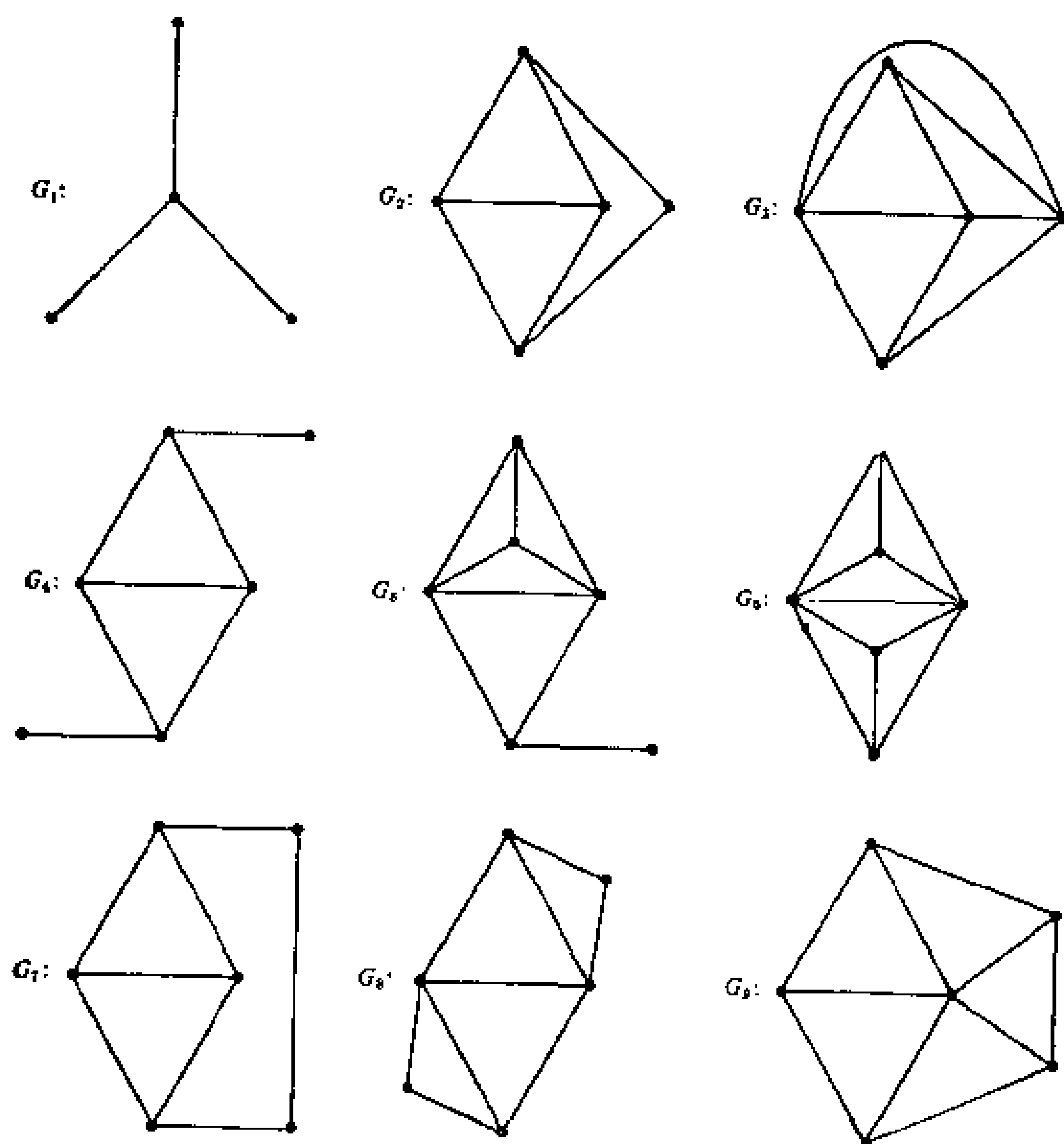


图 8.3 线图的九个禁用子图。

(4) 图 8.3 中九个图的任何一个都不是 G 的一个导出子图。

[证明]　(1) 蕴含 (2). 令 G 是 H 的线图。不失一般性，我们假定 H 没有孤立点。于是在 H 的每一个点处的星形图的各条线导出 G 的一个完全子图，且 G 的每一条线恰在一个这样的子图中。因为 H 的每一条线恰属于 G 的二个点处的星形图，所以 G 中没有一个点在两个以上的这种完全子图中。

(2) 蕴含 (1).　若有将一个图 G 的线分解为满足 (2) 的完全子图 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 这样一个分解，我们要指出一个以 G 为它的线图的图 H 的构造。H 的点相应于这个分解的子图的集 S 和仅属于一个子图 S_i 的 G 的点的集 U。即 $S\cup U$ 是 H 的点集，而两个点当它们的交非空时邻接；即 H 是交图 $\Omega(S\cup U)$。

(2) 蕴含 (4).　容易验证，图 8.3 的九个图中任何一个都不能将它的线划分成满足给定条件的完全子图。因为一个线图的每个导出子图本身也一定是一个线图，就得到所要的结果。

(4) 蕴含 (3).　我们证明若 G 不满足 (3)，则它有一个导出子图是这九个禁用子图中的一个。假定 G 有奇三角形 abc 和 abd 而 c 和 d 不邻接，分别考虑是不是有一个点 v 使这两个奇三角形都有奇数个点与它邻接这两种情形：

情形 1.　有一个点 v 与三角形 abc 的奇数个点邻接也与三角形 abd 的奇数个点邻接。现在有两种可能：或者 v 与每个三角形的正好一个点邻接，或者与两个三角形中某一个的一个以上的点邻接。在后一种情形，v 一定邻接于这两个三角形的所有四个点，给出 G_3 作为 G 的一个导出子图。在前一种情形，或者 v 仅与 a 或 b 邻接，给出 G_1；或者与 c 和 d 都邻接，给出 G_2。

情形 2.　没有使两个三角形都有奇数个点与它邻接的点。这种情形下，令 u 和 v 分别邻接于三角形 abc 和 abd 中的奇数个点。有三种子情形要考虑：

情形 2.1　u, v 的每一点都与相应的三角形中正好一个点邻接。

情形 2.2　u, v 中的一个点与“它的”三角形的所有三个点都

邻接,而另一个点仅与"它的"三角形中的一个点邻接。

情形 2.3 u, v 的每一点都与相应的三角形的所有三个点邻接。

在考虑这些互斥的情形以前,我们先注意两点。若 u 或 v 邻接于 a 或 b,则它也与 c 或 d 邻接,因为否则 G_1 就是一个导出子图。此外,u 和 v 都不能同时与 c 又与 d 邻接,因为这样就导出 G_2 或 G_3。

在情形 2.1 时,若 uc, $vd \in G$,则我们依赖于线 uv 是否在 G 中而有 G_4 或 G_7 为导出子图。若 ub, $vd \in G$,则由上述注记可得 $ud \in G$ 而 $vc \notin G$;若 $uv \notin G$,则点 $\{a, d, u, v\}$ 导出 G_1;又若 $uv \in G$,则 $\{a, b, c, d, u, v\}$ 导出 G_8。若 ub, $va \in G$,则必然 ud, $vc \in G$;所以若 $uv \notin G$,导出 G_8,又若 $uv \in G$,则出现 G_2。最后,若 ub, $vb \in G$,则又得 ud, $vc \in G$,由此可得,依赖于是否有 $uv \in G$,或者 G_9 或者 G_1 是 G 的一个导出子图。

在情形 2.2 时,令 ua, ub, $uc \in G$。显然,若 $ud \in G$,则导出 G_3;于是 $ud \notin G$。现在 v 能邻接于 d 或 b。若 $vd \in G$,则依赖于是否 $uv \in G$,我们可见导出了 G_2 或 G_5。若 $vb \in G$,则依赖于 v 是否与 c 和 u 都邻接,导出或者 G_3 或者 G_1。

在情形 2.3 时,若 ud、vc 或 $uv \in G$,则导出 G_3。其余唯一的可能给出 G_6。

(3)蕴含 (1). 假定 G 是一个图满足陈述的条件。我们显然可以取 G 为连通的。现在,下列各陈述中必恰有一个成立:

1. G 含有两个有一条公共线的偶三角形。

2. 只要 G 中两个三角形有一条公共线,其中一定有一个是奇三角形。

可以证明,若 G 满足第一个陈述,则 G 是画在图 8.4 中的三个图 $H_1 = L(K_{1,3}+x)$、$H_2 = L(H_1)$ 或 $H_3 = L(K_4)$ 中的一个。所以现在假定 G 满足第二个陈述。我们以下指出构造一个图 H 的方法,使 $G = L(H)$。

令 F_1 是 G 的所有不是偶三角形的团的族,其中每一个这样

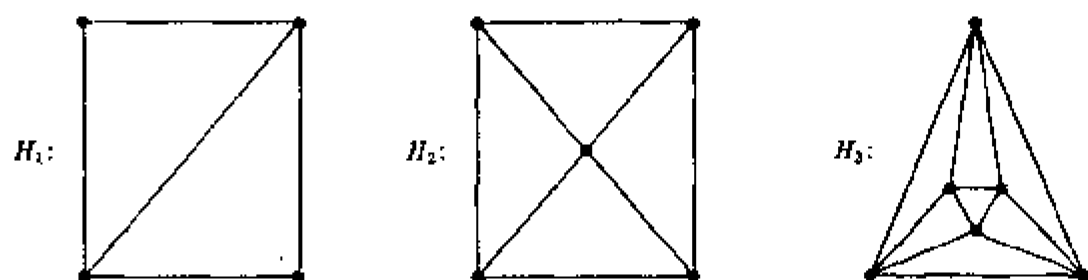


图 8.4 三个线图。

的团看作点的一个集。令 F_2 是 G 的这种点(看作单元素集)的族，它在 F_1 的某个团 K 内，但不邻接于 $G-K$ 的任何一个点。最后，令 F_3 为 G 的只含在一个而且是偶的三角形中的线(每条线看作二个点的一个集)的族。不难验证，G 同构于交图 $H=\Omega(F_1\cup F_2\cup F_3)$的线图。证毕。

上述构造在图 8.5 中予以说明。其中，给定的图 G 中有族 $F_1=\{\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$、$F_2=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 和 $F_3=\{\{5, 7\}, \{6, 7\}\}$，导出交图 H；于是 $G=L(H)$。

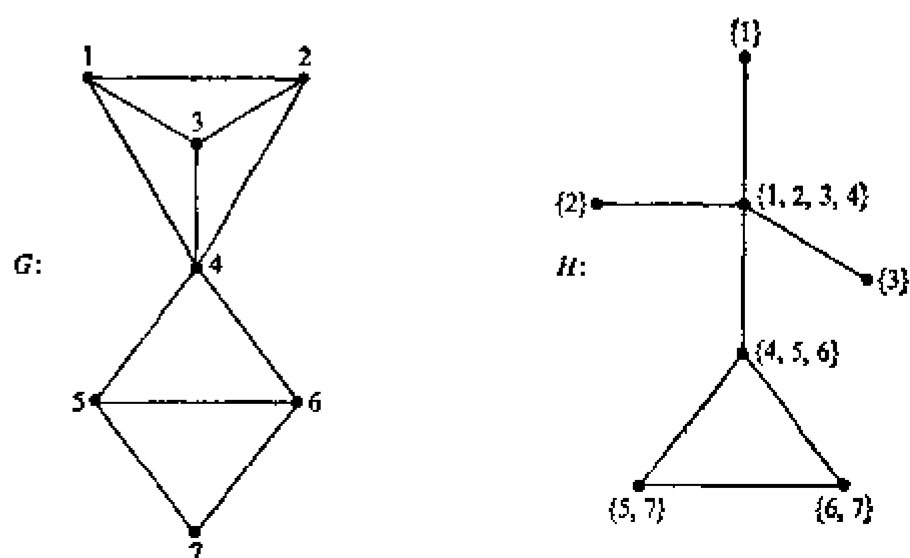


图 8.5 一个线图和它的图。

3. 特殊线图

我们在这一节中提出树、完全图和完全双图的线图的特征。

下述由 G. T. 夏特朗证明的结果可决定一个图什么时候是一个树的线图。

定理 8.5 一个图是一个树的线图当且仅当它是一个连通的块图，其中每个割点恰在两个块中。

[证明] 假定 $G=L(T)$，T 是某个树。则因为一个树的线和块一致，G 也是 $B(T)$。G 的每个割点 x 对应于 T 的一条桥 uv，它恰在对应于 G 中 u 和 v 处两个星形图的两个块上。这就证明了条件的必要性。

为了证明充分性，令 G 是一个块图，其中每个割点恰在两个块中。因为一个块图的每个块是完全的，由定理 8.2，存在一个图 H，使 $L(H)=G$。若 $G=K_3$，我们可取 $H=K_{1,3}$。若 G 是任何其他的块图，我们证明 H 一定是一个树。假定 H 不是一个树，所以它含有一个圈。若 H 本身是一个圈，则按定理 8.3，$L(H)=H$。但唯一的一个是块图的圈是 K_3，我们不考虑这种情形。从而 H 必真含一个圈。由此得 H 有一个圈 Z 和邻接于 Z 的两条线的一条线 x，它与 G 的某条线 y 不邻接。$L(H)$ 的点 x 和 y 在 $L(H)$ 的一个圈上，且它们不邻接。因为 $L(H)$ 是一个块图，这与定理 3.5 的条件矛盾。所以 H 是一个树。证毕。

在图 8.6 中画出了一个块图 G，其中每一个割点恰在两个块中。以 G 作为线图的树 T 可以构成如下：先作块图 $B(G)$，然后加

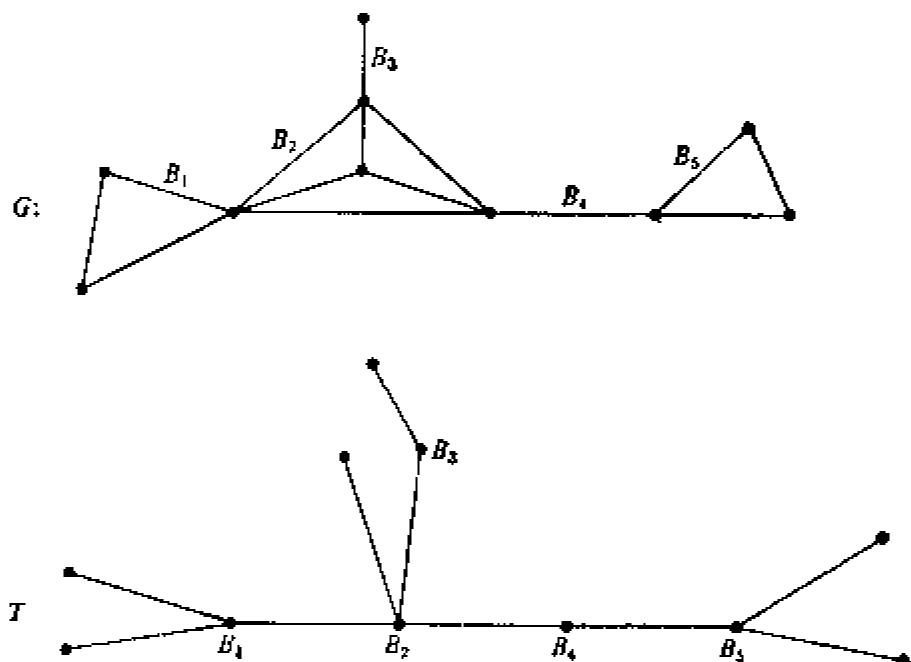


图 8.6 一个树 T 的线图 G。

入一些新的点，每个新点代表 G 中的一个不是割点的点，再加入一些线来联结如下的每一对点：其中一个点代表一个块，另外一个点代表这个块中的一个不是割点的点。

完全图和完全双图的线图的特征几乎总是由考虑 K_p 和 $K_{m,n}$ 中线的邻接性的相当直观的观察来给出。对完全图的情形，独立地由张[C7]和霍夫曼[H43]，[H44]解决。

定理 8.6　除 $p=8$ 外，一个图 G 是 K_p 的线图当且仅当

1．G 有 $\binom{p}{2}$ 个点，

2．G 是 $2(p-2)$ 度正则的，

3．每两个不邻接的点恰与四个点共同邻接*，

4．每两个邻接的点恰与 $p-2$ 个点共同邻接。

显然，$L(K_p)$ 有这四个性质。但是很难看出当 $p=8$ 时恰有三个例外图也满足这些条件。

对于完全双图，相应的结果由穆恩 [M13] 和霍夫曼 [H46] 得到。

定理 8.7　除 $m=n=4$ 外，一个图 G 是 $K_{m,n}$ 的线图当且仅当

1．G 有 mn 个点，

2．G 是 $m+n-2$ 度正则的，

3．每两个不邻接的点恰与两个点共同邻接，

4．在邻接的点对中，恰有 $n\binom{m}{2}$ 对恰与 $m-2$ 个点共同邻接，其余 $m\binom{n}{2}$ 对恰与 $n-2$ 个点共同邻接。

只有一个例外图满足这些条件。它有 16 个点但不是 $L(K_{4,4})$，由舒里克汉德 (Shrikhande) [S12] 在他证明 $m=n$ 情形下的定理 8.7 时所发现。

---

* 即 G 中恰有四个点，它们都与这两个不邻接的点都邻接。下文所说的共同邻接仿此理解。——译注

4. 线图与可行遍性

我们现在用线图来考察欧拉图和哈密顿图的关系。

若 $x=uv$ 是 G 的一条线，又 w 不是 G 的一个点，则当用线 uw 和 wv 来代替 x 时称 x 被细分。若 G 的每一条线被细分，产生的图称为细分图 $S(G)$；见图 8.7。我们用 $S_n(G)$ 记在 G 的每条线中插进 n 个度为 2 的新点来得到的图，故 $S(G)=S_1(G)$。我们于是可以定义一个新的图 $L_n(G)=L(S_{n-1}(G))$。注意，一般地 $L_n(G)\neq L^n(G)$，右边是 G 的 n 次迭线图。

定理 8.8 若 G 是欧拉的，则 $L(G)$ 是既欧拉的又哈密顿的。

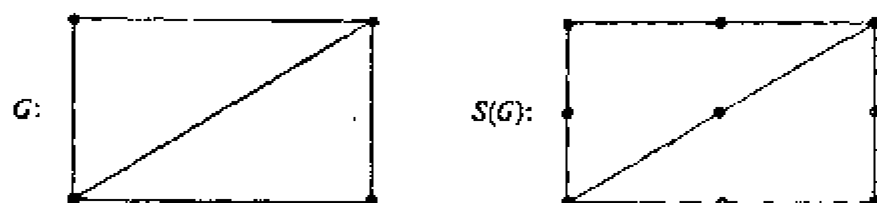


图 8.7 一个图和它的细分图。

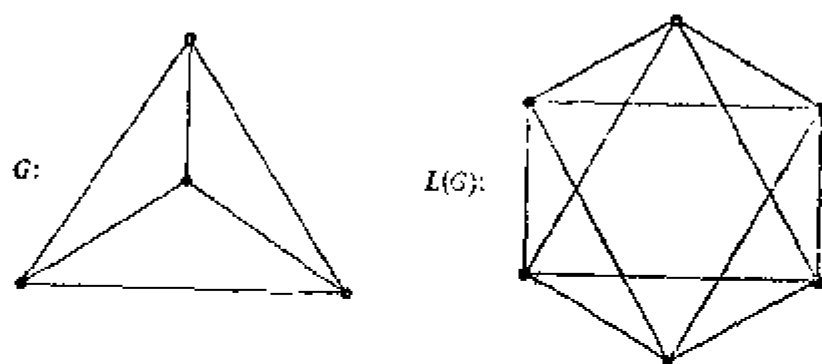


图 8.8 一个反例。

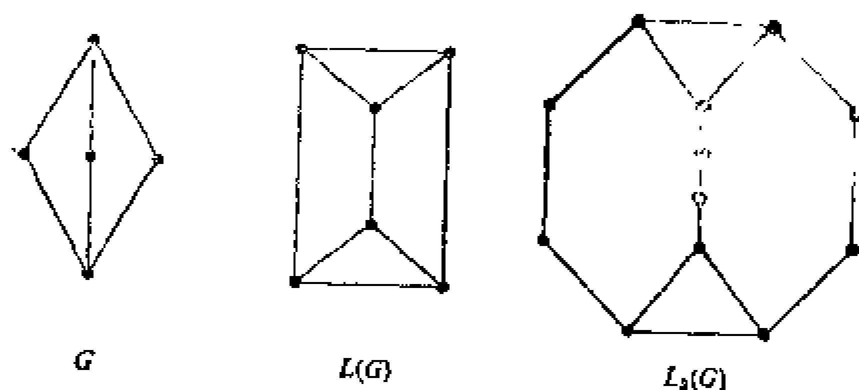


图 8.9 另一个反例。

若 G 是哈密顿的，则 $L(G)$ 是哈密顿的。

很容易给这些陈述的逆命题提供反例。例如图 8.8 中，$L(G)$ 是欧拉的和哈密顿的，但 G 不是欧拉的；在图 8.9 中，$L(G)$ 是哈密顿的，但 G 不是。

定理 8.8 的第二个陈述由下列哈拉里和纳什-威廉斯 [HN1] 的结果所改进，它由上一个定理和等式 $L_2(G)=L(S(G))$ 立即可以得到。

定理 8.9　$L_2(G)$ 成为哈密顿图的一个充分条件是 G 是哈密顿的，一个必要条件是 $L(G)$ 是哈密顿的。

图 8.10 和 8.9 中的图表明，为了使 $L_2(G)$ 成为哈密顿图，这些条件中第一个不是必要的而第二个不是充分的。我们也注意到（见图 8.11），$L(G)=L_1(G)$ 和 $L_2(G)$ 可能是哈密顿的而 G 不是欧拉的。然而，在这个系列中下一个图 $L_3(G)$ 提供了这两个性质之间的联系。

定理 8.10　一个图 G 是欧拉的当且仅当 $L_3(G)$ 是哈密顿的。

然而，几乎对于每一个连通图 G，如由夏特朗 [C9] 所证明，几乎所有的图 $L^n(G)$ 都是哈密顿的。

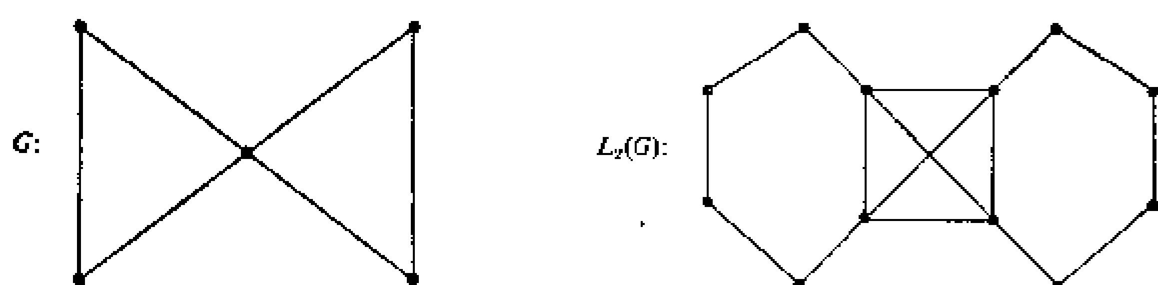


图 8.10　又一个反例。

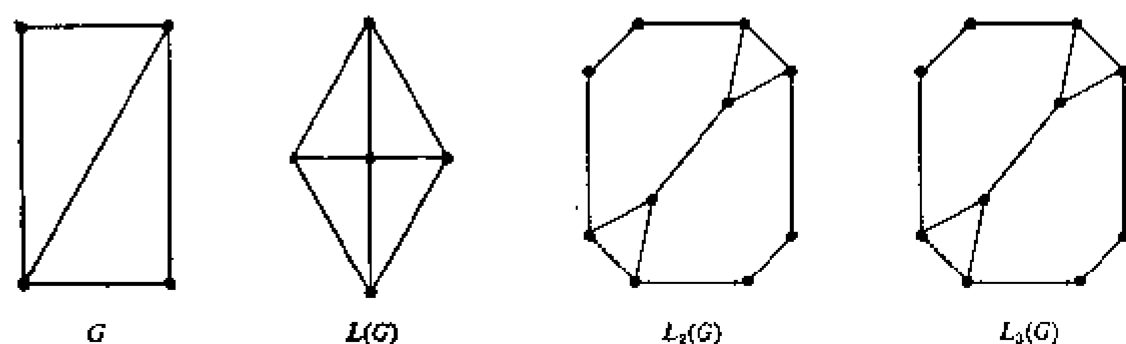


图 8.11　一列图 $L_n(G)$。

定理 8.11　若 G 是有 p 个点的一个非平凡的连通图，但它不是一条道路，则对所有 $n \geqslant p-3$，$L^n(G)$ 是哈密顿的。

在图 8.12 中给出一个例，其中画出了一个 6 点图 G，也画出了 $L(G)$、$L^2(G)$ 及哈密顿图 $L^3(G)$。

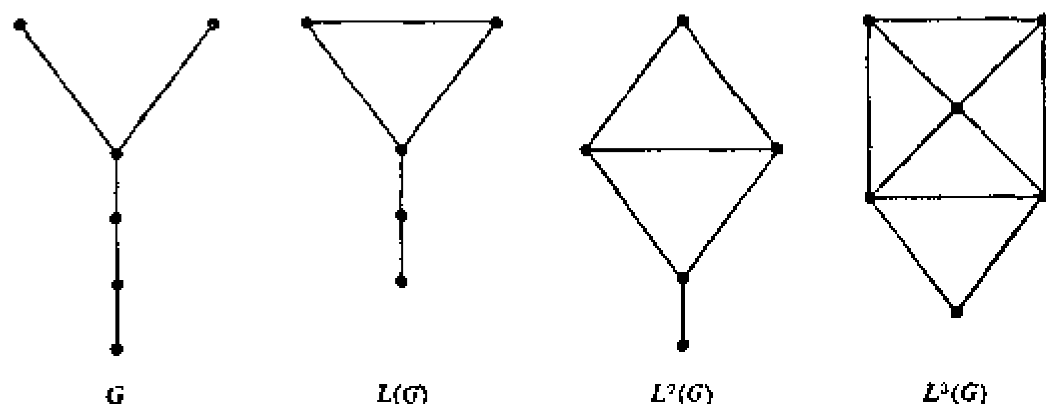


图 8.12　一列迭线图。

5. 全图

一个图的点和线都称为它的元素。一个图的两个元素如果它们是关联的或邻接的则称它们为邻元素。全图 $T(G)$ 以 $V(G)\cup X(G)$ 为点集，当 $T(G)$ 的两个点在 G 中是邻元素时它们邻接。图 8.13 画出了全图 $T(K_3)$ 的构成。容易看出，$T(G)$ 总是含 G 和 $L(G)$ 两者为导出子图。

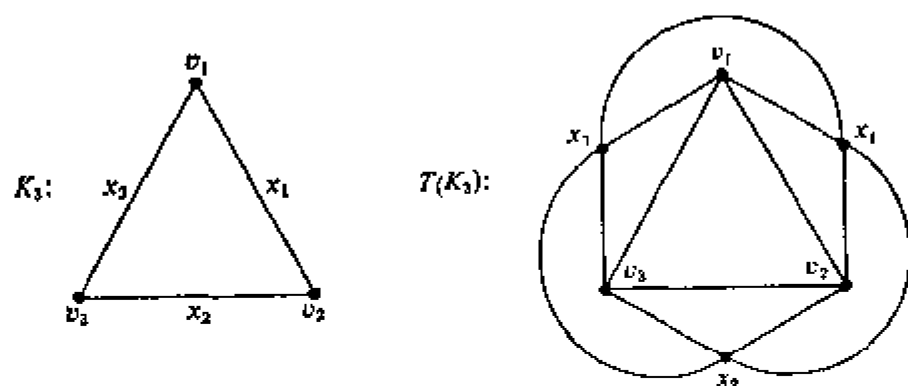


图 8.13　一个全图的构成。

全图的一个等价特征由贝扎特[B4]给出。

定理 8.12　全图 $T(G)$ 同构于细分图 $S(G)$ 的平方。

系 8.12(a)　若 v 是 G 的一个点，则点 v 在 $T(G)$ 中的度为 $2\deg v$。若 $x=uv$ 是 G 的一条线，则点 x 在 $T(G)$ 中的度为 $\deg u$

$+\deg v$。

系 8.12(b) 若 G 是一个 (p, q) 图，它的各点的度为 d_i，则全图 $T(G)$ 有 $p_T=p+q$ 个点和 $q_T=2q+\frac{1}{2}\sum d_i^2$ 条线。

在第二章中已经定义了拉姆齐函数。那里说过，它的一般求法仍然是一个没有解决的问题。贝扎特和拉杰维(Radjavi)[BR1]定义和解决了由线图引起的一个和拉姆齐问题类似的问题。**线拉姆齐数** $r_1(m, n)$ 是满足下列条件的最小的正整数 p，它使得每一个有 p 个点的连通图或者含有 n 条两两不邻接的线或者含有 m 条邻接在一点的线，即星形图 $K_{1,m}$。于是 $r_1(m, n)$ 是使得任何一个有 p 个点的图 G，$L(G)$ 含有 K_m 或 $\overline{L(G)}$ 含有 K_n 的最小正整数 p。

定理 8.13 对 $n>1$，我们总是有 $r_1(2, n)=3$。对所有其余的 m 和 n，$r_1(m, n)=(m-1)(n-1)+2$。

注意，$r_1(m, n)=r_1(n, m)$ 并不总是成立的。而且，与拉姆齐数不同，$r_1(m, n)$ 仅对于连通图有定义。

习题

8.1 在什么条件下一个线图的线可以划分为完全子图，使每个点恰在两个这样的子图中？

8.2 用 G 中三角形的数目 n 和 G 的划分来求 $L(G)$ 中三角形的数目。

8.3 找一个判定准则来决定一个连通图有一个正则的线图。

8.4 一个图 G 当且仅当它的线图 $L(G)$ 满足乌拉姆猜想(p.14)时，它可以由 q 个生成子图 $G-x_i$ 的总体来重构。

(赫明格(Hemminger)[H41])

8.5 若 G 是 n-线连通的，则

(1) $L(G)$ 是 n-连通的。

(2) $L(G)$ 是 $(2n-2)$-线连通的。

(3) $L^2(G)$ 是 $(2n-2)$-连通的。

（夏特朗和斯坦瓦特(Stewart)[CS1]）

8.6　a）构造一个 $p\geqslant4$ 的连通图 G，使得 $L(G)$ 不是欧拉的而 $L^2(G)$ 是欧拉的。

b）没有 $p\geqslant5$ 的连通图 G，使 $L^2(G)$ 不是欧拉的而 $L^3(G)$ 是欧拉的。

8.7　一个图是块，其线图不是哈密顿的，则它是有8个点的 θ 图，其中度为3的两个点之间的距离是3。　（J. W. 穆恩）

8.8　$L(G)$是哈密顿的当且仅当 G 中有一条闭迹，对于 G 的每一条线它含有邻接于这条线的至少一个点。

8.9　图 $L_2(G)$ 是哈密顿的当且仅当 G 中有一条闭的生成迹。　（哈拉里和纳什-威廉斯[HN1]）

8.10　下列陈述是等价的：

(1) $L(G)$ 是欧拉的。

(2) G 的所有的点的度有相同的奇偶性且 G 是连通的。

(3) $T(G)$ 是欧拉的。

8.11　$T(K_p)$同构于 $L(K_{p+1})$。

（贝扎特，夏特朗和诺德豪斯(Nordhaus)[BCN1]）

8.12　定义 G 的元素的子集的一个族 F，使得 $T(G)=\Omega(F)$。

8.13　a）若 G 是哈密顿的，$T(G)$ 也是哈密顿的。若 G 是欧拉的，则 $T(G)$ 既是欧拉的又是哈密顿的。

b）每一个非平凡的连通图 G 的全图 $T(G)$ 含有一个生成欧拉子图。

c）若一个非平凡图 G 含有一个生成欧拉子图，则 $T(G)$是哈密顿的。

d）若 G 是非平凡的和连通的，则 $T^2(G)$ 是哈密顿的。

（贝扎特和夏特朗[BC2]）

8.14　对任何一个多重图 M，定义线图 $L(M)$ 为 $V(L(M))=X(M)$，而当 x 和 y 是在一个或二个点接触的不同的线中时，在 $L(M)$中$x\,\mathrm{adj}\,y$。则一个图 G 是某个多重图的线图当且仅当它没有图8.3中的 G_1，G_3 或 G_9 形状的导出子图。　（D. P. 盖勒）

第九章 因子分解

全体是它各部分的总和。
——欧几里得:《几何原本》

全体大于它各部分的总和。
—— M. 韦德哈默:《形象思维》

有一个在各种不同场合下出现的问题是决定一个给定的图是不是可以分解为有预先给定的性质的线不相交的生成子图。所要求的性质往往是有给定的度的正则性。特别是,托特发现了一个图中存在一个1度正则生成子图的判定准则。这里将提出关于将完全图分解为1度或2度正则的生成子图的某些结果。

我们还要研究将一个给定的图的线分成生成林的划分,并且提出一个称为"荫度"的不变量。纳什-威廉斯导出了用一个图的子图给出它的荫度的一个公式。我们也给出了在完全图和完全双图中最小数目的生成林的明确的构造方法。

1、1-因子分解

一个图 G 的一个**因子**是 G 的一个非全不连通的生成子图。我们说 G 是因子 G_i 的和*,若 G 是这些因子的线不相交的并。这样的一个并称为 G 的一个**因子分解**。一个 n-**因子**是一个 n 度正则的因子。若 G 是几个 n-因子的和,它们的并称为一个 n-**因子分解**,而 G 本身称为是 n-**可因子化的**。除非另有声明,本章内提出的结果出于科尼希 [K10, pp. 155~195]或可由其中的定理推出。那本书里广泛地讨论了这个问题。

若 G 有一个1-因子,例如 G_1,则显然 p 是偶数,且 G_1 的各条线是独立的。特别是,K_{2n+1} 不能有1-因子,但 K_{2n} 确实有1-因子。

* 有人称为积,有人称为直接和。

定理 9.1 完全图 K_{2n} 是1-可因子化的。

[证明] 我们只要给出一个分 K_{2n} 的线的集 X 为$(2n-1)$个1-因子的划分就可以了。为此，我们以 $v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$ 记 G 的点，又对 $i=1, 2, \cdots, 2n-1$，定义线集 $X_i=\{v_iv_{2n}\}\cup\{v_{i-j}v_{i+j}; j=1, 2, \cdots, n-1\}$，其中每个下标 $i-j$ 和 $i+j$ 表示为1, 2, …, $(2n-1)$ 模 $(2n-1)$ 中的一个数。容易看出，集 $\{X_i\}$ 给出 X 的一个合适的划分，而由 X_i 导出的子图 G_i 的和是 K_{2n} 的一个 1-因子分解。

例如，考虑画在图 9.1 中的图 K_6。在定理的证明中提出的 1-因子分解产生五个 1-因子 G_i。

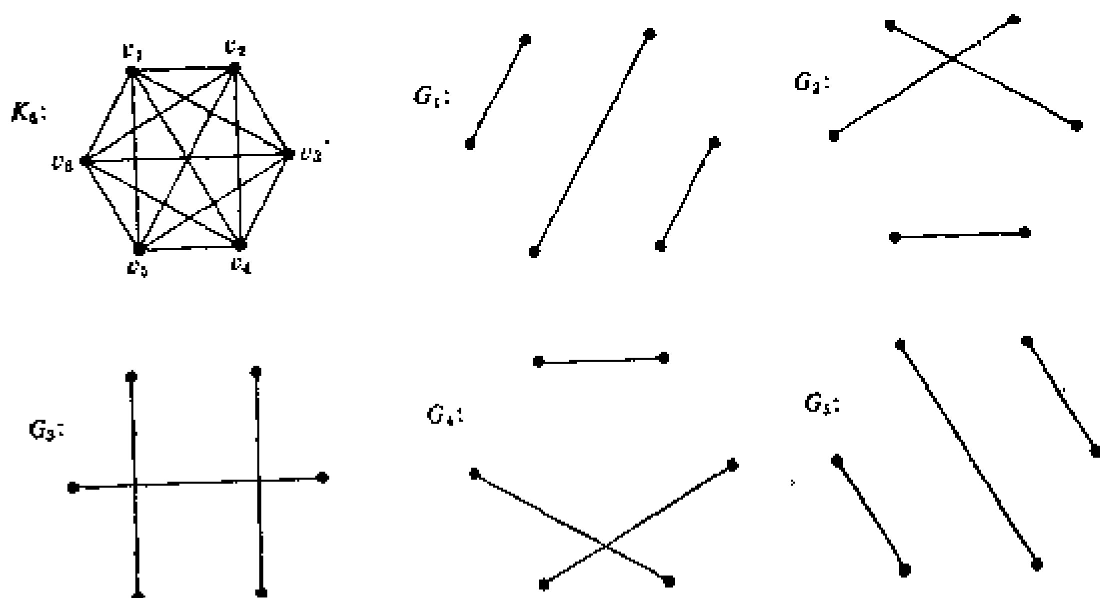


图 9.1 K_6 的一个 1-因子分解。

虽然完全双图 $K_{m,n}$ 在 $m\neq n$ 时没有 1-因子，但由下一定理可见，图 $K_{n,n}$ 是1-可因子化的。

定理 9.2 每一个正则双图是1-可因子化的。

决定一个给定的图是不是1-可因子化的，或者甚至建立是否存在任何1-因子，都不是一个容易的问题。然而，拜内克和普卢默[BP2]证明了许多图不能恰有一个1-因子。

定理 9.3 若一个2-连通图有一个1-因子，则至少有二个不同的1-因子。

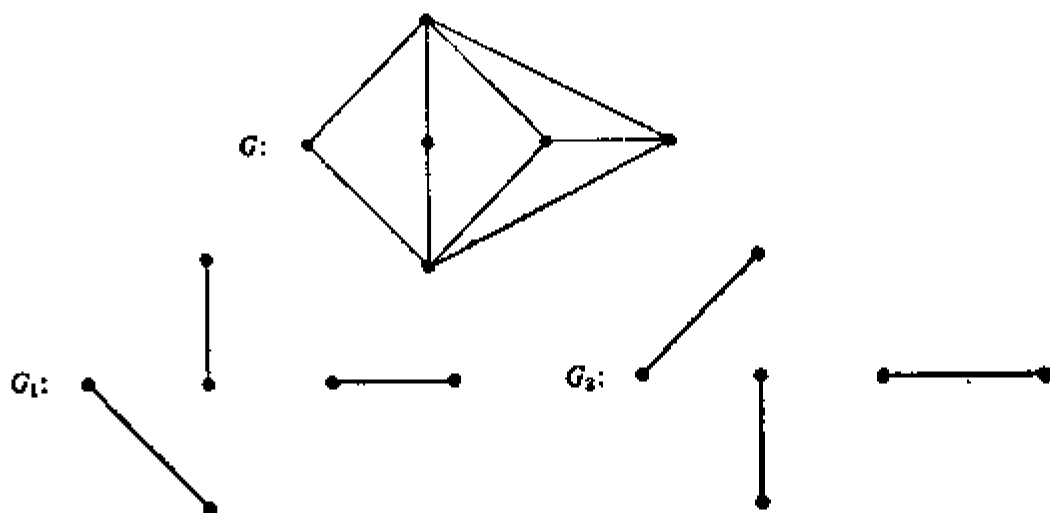


图 9.2　一个块的两个 1-因子。

图 9.2 中的图 G 是恰有二个 1-因子的块，这二个 1-因子有一条公共线。

关于因子分解的最重要的结果属于托特 [T7]，他给出了具有 1-因子的图的特征。一般地说，这个鉴定 1-因子的方法是很不便于应用的。这里给出的证明基于加莱 [G1]。

一个互相不邻接的线的集称为是*独立的*。G的一个有奇数个点的支叫做一个奇支。

定理 9.4　一个图 G 有一个 1-因子当且仅当 p 是偶的，且不存在一个点集 S，使 $G-S$ 的奇支的数目超过 $|S|$。

[证明]*　这个定理的较容易的一半是它的必要性。令 S 是 G 的点的任何一个集，又令 H 是 $G-S$ 的一个支。在 G 的任何一个 1-因子中，H 的每个点一定是或者与 H 的另一个点或者与 S 的一个点相配合。但若 H 有奇数个点，则 H 中至少有一个点与 S 的一个点配合。令 k_0 是 $G-S$ 的奇支的数目。若 G 有一个 1-因子，则因为在一个 1-因子中 S 的每一个点只能和 $G-S$ 的至多一个点配合，而因此至多只能和一个奇支相关，所以 $|S|\geqslant k_0$。

为了证明充分性，假定 G 没有 1-因子，又令 S 是独立的线的一个最大集。令 T 记不在 S 中的线的集，且令 u_0 是一个只关联

* 一个较短的证明见 I. Anderson, Perfect Matching of a Graph, *J. Combinatorial Theory*, 10(1971), 183～186。——译注

于 T 的线的点。若一条迹的各条线交替地属于 S 和 T，就称它是交替的。对每个点 $v\neq u_0$，若没有 u_0-v 交替迹，则称 v 是一个 0-点；若有这样的迹，并且若所有这种迹在 v 处都以属于 S 的一条线结束，则称 v 是一个 S-点；又若每条这种迹在 v 处都以属于 T 的一条线结束，则称 v 是一个 T-点；又若在 v 处兼有以属于 S 及 T 的线结束的这种迹，则称 v 是一个 ST-点。立即可以推得下列各陈述：

邻接于 u_0 的每个点是一个 T-点或 ST-点。

任何 S-点和 0-点都不和任何 S-或 ST-点邻接。

任何 T-点都不可能由 S 的一条线联结于任何 T-或 0-点。

于是，每个 S-点由 S 的一条线联结于一个 T-点。此外，每个 T-点 v 关联于 S 的一条线，因为否则在一条交替 u_0-v 迹中的线可以用对换各条线对 S 和 T 的属性的办法得到一个更大的独立集。

令 H 是除去 T-点得到的图。H 的一个支含有 u_0，且这个支中其余的点是 ST-点。其余的支或者由一个孤立的 S-点，或者仅由 ST-点，或者仅由 0-点组成。

我们现在证明，H 的任何一个含有 ST-点的支 H_1 有奇数个 ST-点。显然，H_1 或者含有 u_0，或者含有一个点 u_1，它在 G 中由 S 的一条线联结于一个 T-点，使某条交替 u_0-u_1 迹含有这条线而不含 H_1 中其余的点。若 H_1 含有 u_0，我们取 $u_1=u_0$。下列论证用来证明每个不同于 u_1 的点 v 在 H_1 中关联于 S 的某条线。为了证明这一点，只要证明在 H_1 中存在一条以 S 的线结束的交替 u_1-v 迹。

为此，第一步是证明若存在一条交替 u_1-v 迹 P_1，则有一条这种迹以 S 的一条线结束。令 P_2 是一条交替 u_0-v 迹，它以 S 的一条线结束。且令 $u'v'$ 是 P_2 的最后一条不在 H_1 中的线（假如存在不在 H_1 中的线）。则 u' 一定是一个 T-点而 $u'v'$ 是 S 中的一条线。现在由 u_1 出发沿着 P_1 走，直到到达 P_2 的一个点 w'。继续沿着 P_2 的两个方向中的某一个方向走一定能给出一条交替迹。若走向

v' 产生一条交替迹，则原来的 u_0-u_1 迹 P_0 续以这条新迹和线 $v'u'$，一定就是以 S 的一条线结束的 u_0-u' 迹。所以 u' 不能是一个 T-点。从而，一定有一条以 S 的一条线结束的 u_1-v 迹。

现在我们先假定没有 u_1-v 交替迹，再从这里推出这种迹一定存在。此时有一个点 w 邻接于 v，对它有一条 u_1-w 交替迹。若线 wv 在 S 中，则 u_1-w 交替迹以 T 的一条线结束；而若 wv 在 T 中，前面的推理证明，存在一条以 S 的线结束的 u_1-w 迹。在这两种情形下，总有一条 u_1-v 交替迹。

这表示支 H_1 中有奇数个点，且若 H_1 不含 u_0，它的各点中恰有一个点由 S 的一条线联结于一个 T-点。从而，除了 H 的含有 u_0 的支和全由 0-点构成的支以外，每个支以 S 的一条线与正好一个 T-点配对。因为每一个这种支和含有 u_0 的那个支都是奇的，定理证毕。

图 9.3 中的图有偶数个点，但不含 1-因子，因为若由 G 中移去集 $S=\{v_1, v_2\}$，留下四个孤立点(从而有四个奇支)。

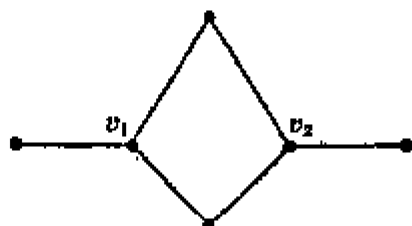


图 9.3　没有 1-因子的一个图。

建立在他的判定一个给定的图中存在 1-因子的准则上，托特 [T10] 可以给出有预定的度序列的生成子图的图的特征。后来，[T11]，他又证明了这个结果是定理 9.4 的一个直接推论。考虑 G 的一个标定和一个从 V 到非负整数中的函数 f。令 S 和 T 是 V 的不相交的子集，令 H 是 $G-(S\cup T)$ 的一个支。又令 $q(H, T)$ 是 G 中联结 H 的一个点和 T 的一个点的线的数目。则我们可以用 $k_0(S, T)$ 记 $G-(S\cup T)$ 中使得 $q(H, T)+\sum_{u\in H} f(u)$ 为奇数的支 H 的数目。

定理 9.5　令 G 是一个给定的图，且令 f 是从 V 到非负整数中的一个函数，则 G 中没有由 f 给定的度序列的生成子图当且仅当存在不相交的点集 S 和 T，使得

$$\sum_{u\in S} f(u) < k_0(S, T) + \sum_{v\in T} [f(v) - d_{G-S}(v)]。$$

2. 2-因子分解

若一个图是2-可因子化的，则每个因子一定是不相交圈的一个并。若一个2-因子是连通的，则它是一个生成圈。我们已经看到，一个完全图是1-可因子化的当且仅当它有偶数个点。因为一个2-可因子化的图的所有的点的度一定都是偶数，所以完全图K_{2n}不是2-可因子化的。奇完全图是2-可因子化的，而且事实上还有更强的结论。

定理 9.6　图K_{2n+1}是n个生成圈的和。

[证明]　为了在K_{2n+1}中构成n个线不相交的生成圈，先标定它的点$v_1, v_2, \cdots, v_{2n+1}$。然后，在点$v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$上构成$n$条道路$P_i$如下：$P_i = v_i v_{i-1} v_{i+1} v_{i-2} \cdots v_{i-n} v_{i+n}$。于是$P_i$的第$j$点是$v_k$，其中$k = i + (-1)^{j+1}[j/2]$，并且所有下标取为整数1, 2, $\cdots$, $2n \pmod{2n}$。生成圈Z_i于是由联结v_{2n+1}于P_i的两个端点构成。

对于图K_7，这种构造法在图9.4中画出。道路P_i的各条线是实线，两条加上去的线是虚线。

有K_{2n}的一个分解改进了定理9.1的结果。

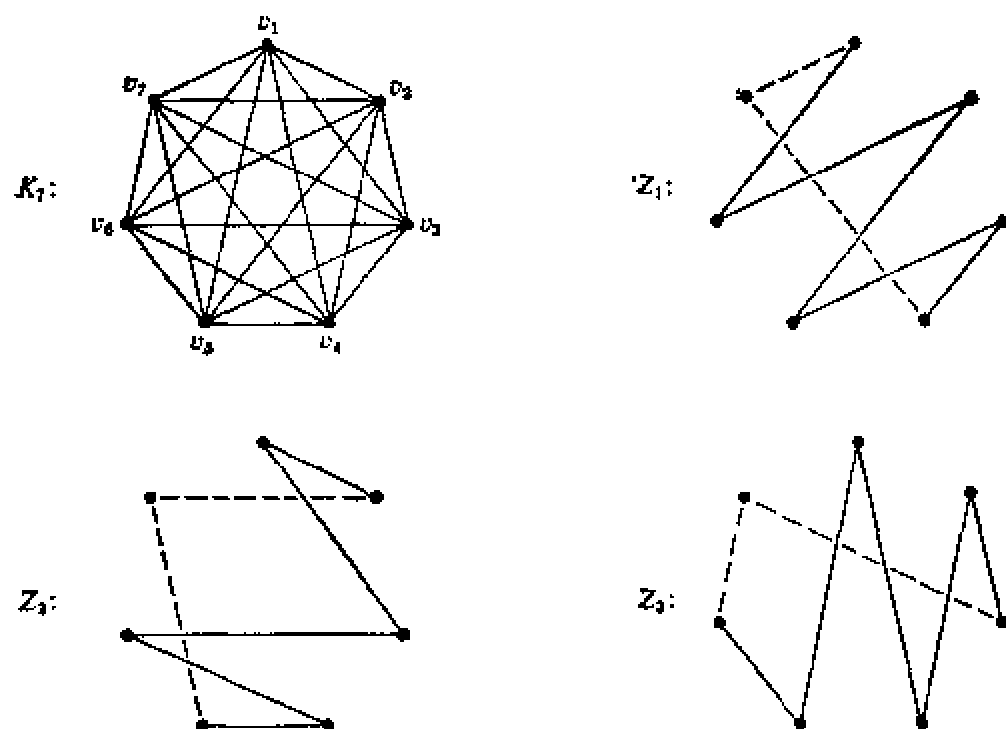


图9.4　K_7的一个2-因子分解。

定理 9.7　完全图 K_{2n} 是一个 1-因子和 $n-1$ 个生成圈的和。

当然，每个 1 度正则的图本身是一个 1-因子，而每个 2-度正则的图是一个 2-因子。若一个 2 度正则的图 G 的每一个支是一个偶圈，则因为 G 能表示为两个 1-因子的和，它也是 1-可因子化的。若一个三次图含有一个 1-因子，它一定也有一个 2-因子。但是有许多三次图并没有 1-因子。

图 9.5 中的图有三条桥。彼得森(Petersen)[P3] 证明了任何一个没有 1-因子的三次图一定有一条桥。

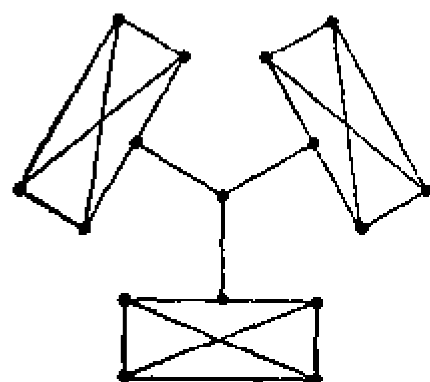


图 9.5　没有 1-因子的一个三次图。

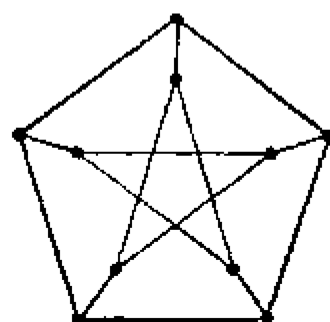


图 9.6　彼得森图。

定理 9.8　每一个没有桥的三次图是一个 1-因子和一个 2-因子的和。

彼得森给出了一个没有桥且不是三个 1-因子的和的三次图，从而证明了这个结果不能再加强。这个有名的图画在图 9.6 中，它称为彼得森图。由定理 9.8，它是一个 1-因子和一个 2-因子的和。五边形和五角星形一起构成了一个 2-因子，而联结五边形和五角星形的五条线构成一个 1-因子。

彼得森 [P3] 也得到了可以将一个图分解为 2-因子的一个准则。

定理 9.9　一个连通图是 2-可因子化的当且仅当它是偶数度正则的。

3. 荫度

到现在为止，已经考虑过的因子分解的形式仅仅是每个因子

都是一个 n-因子。另外一些形式的因子分解也曾被研究过。我们现在讨论其中的一种，而其余的在第十一章中再来讨论。任何一个图 G 可以表示为生成林的和，只要令每个因子只含 G 的 q 条线中的一条就可以了。一个自然而然的问题是求将 G 分解为线不相交的生成林时生成林的最少数目。这个数目称为 G 的荫度，且记作 $\Upsilon(G)$。例如，$\Upsilon(K_4)=2$ 和 $\Upsilon(K_5)=3$。分解这些图为生成林的最小分解画在图 9.7 中。

纳什-威廉斯 [N2] 发现的一个公式给出任何一个图的荫度。

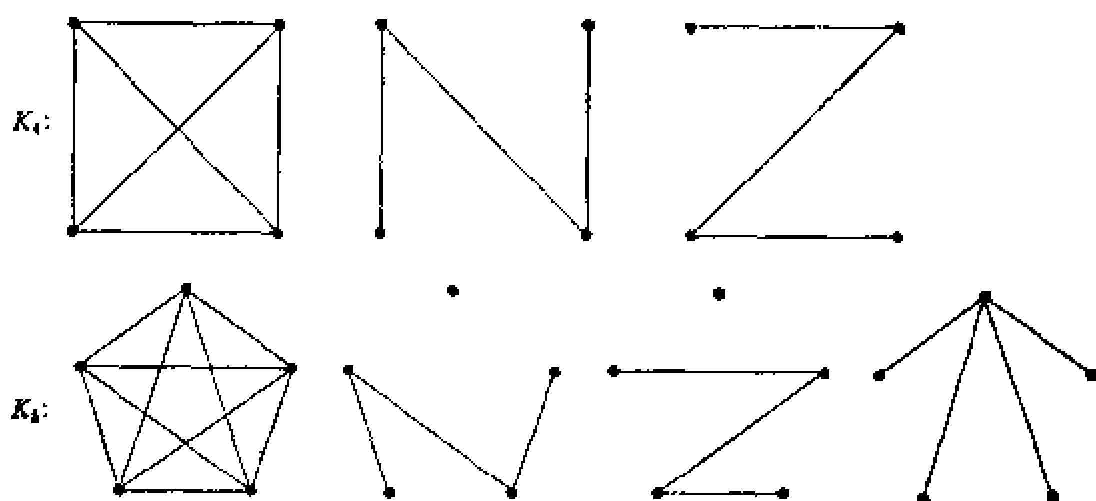


图 9.7　分成生成林的最小分解。

定理 9.10　令 G 为一个非平凡的 (p, q) 图，又令 q_n 是 G 的任何一个有 n 个点的子图中线的最多数目，则

$$\Upsilon(G)=\max_n\left\{\frac{q_n}{n-1}\right\}。$$

$\Upsilon(G)\geqslant\max\limits_n\{q_n/(n-1)\}$ 可以如下证明。因为 G 有 p 个点，在任何一个生成林中线的最多数目是 $p-1$。从而，充满 G 所需要的生成林的最少可能数目至少是 $q/(p-1)$，这个最少可能数目按定义就是 $\Upsilon(G)$。但 G 的荫度是一个整数，所以 $\Upsilon(G)\geqslant\{q/(p-1)\}$。要证明的不等式现在可以从下列事实得到，即对 G 的任何一个子图 H，$\Upsilon(G)\geqslant\Upsilon(H)$。

在所有有 $n\leqslant p$ 个点的子图 H 中，$\max\Upsilon(H)$ 将出现在含有最多的线的导出子图中。于是，若 H 是 G 的一个子图，$\Upsilon(H)$ 可

以大于 $\{q/(p-1)\}$。图 9.8 中的 (10, 15) 图说明了这个结果。取 $n=5$ 和 $q_n=10$（对 $H=K_5$），我们有

$$\Upsilon(H) \geqslant \left\{\frac{q_n}{n-1}\right\}=3>2=\left\{\frac{q}{p-1}\right\}$$

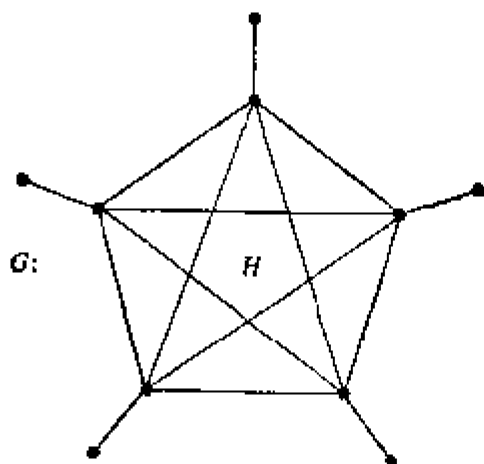


图 9.8 有一个稠密子图 H 的图 G。

对于 K_p，q_n 的最大值显然在 $n=p$ 时出现，所以 $\Upsilon(K_p)=\{p/2\}$。类似地，对完全双图 $K_{r,s}$，$\{q_n/(n-1)\}$ 当 $n=p=r+s$ 时取到最大值。

系 9.10(a) 完全图和完全双图的荫度为

$$\Upsilon(K_p)=\left\{\frac{p}{2}\right\} \text{ 和 } \Upsilon(K_{r,s})=\left\{\frac{rs}{r+s-1}\right\}。$$

虽然纳什-威廉斯公式给出一个任意的图因子分解为生成林的最少数目，然而它的证明并没有给出一种特殊的分解法。拜内克 [B5] 对完全图和完全双图给出了这种分解法，我们在这里给出前者。对于 $p=2n$，K_p 实际上可以分解为 n 条生成道路。标定点 $v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$，我们考虑与定理 9.6 的证明中同样的 n 条道路，

$$P_i=v_iv_{i-1}v_{i+1}v_{i-2}v_{i+2}\cdots v_{i-n}v_{i+n}。$$

对于 $p=2n+1$，由系 9.10(a)，K_p 的荫度为 $n+1$。取上述各条道路，对其中的每一条道路加上一个附加的标以 v_{2n+1} 的点，然后联结 v_{2n+1} 与另外 $2n$ 个点构成一个星形图就得到一个分解。对 $p=9$，这种构造法画在图 9.9 中。容易看出，这种构造由 K_9 的一个点处的星形图与相应于 K_8 的上述四条生成道路的生成子林所组成。

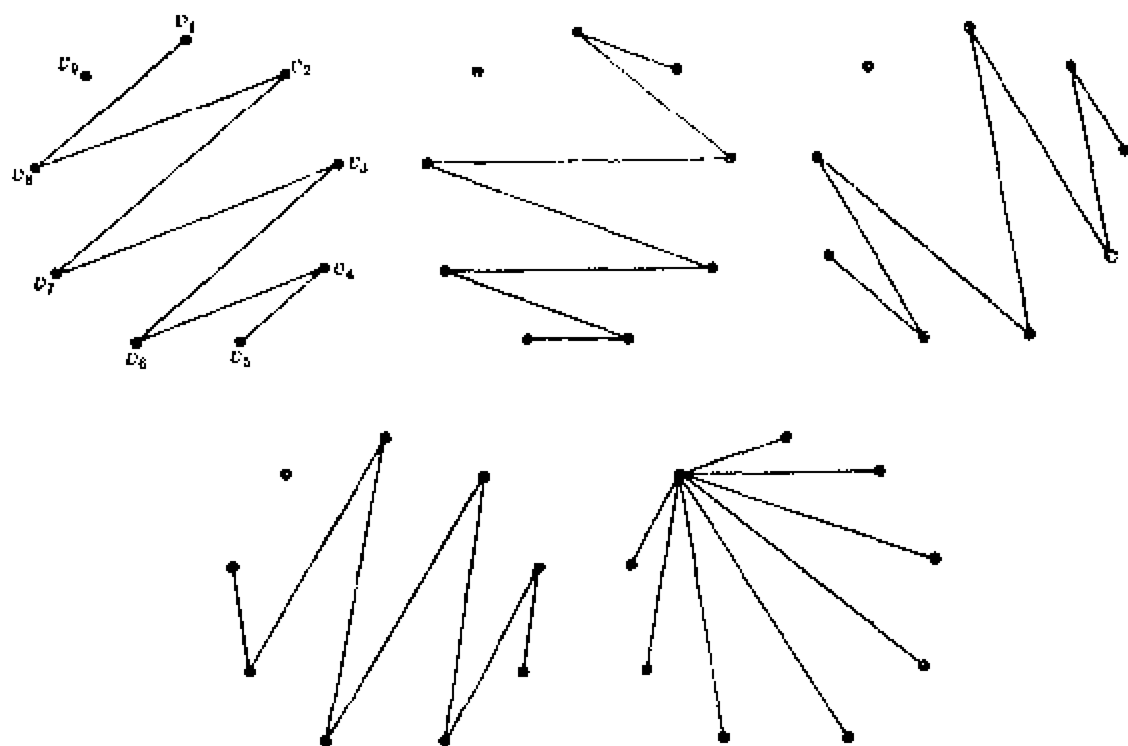


图 **9.9** 分 K_9 为生成树的一个最小分拆。

习题

9.1 图 K_4 有唯一的一个 1-因子分解。求 $K_{3,3}$ 和 K_6 的 1-因子分解的数目。

9.2 给出 K_8 的一个 1-因子分解。

9.3 K_{2n} 的 1-因子分解的数目为 $(2n)!/(2^n n!)$。

9.4 K_{6n-2} 有一个3-因子分解。

9.5 对 $n \geqslant 1$, K_{4n+1} 是 4-可因子化的。

9.6 应用托特定理 9.4 证明图 9.5 的图没有 1-因子。

9.7 若 p 为偶数的一个 n 连通图 G 是 n 度正则的，则 G 有 1-因子。 (托特[T7])

9.8 证明或否定：令 G 是有一个 1-因子 F 的图。G 的一条线在一个以上 1-因子中当且仅当它在一个圈上，且这个圈的线交替地属于 F。 (拜内克和普卢默 [BP2])

9.9 将 K_9 表示为四个生成圈之和。

9.10 彼得森图是不是哈密顿的?

***9.11** 相应于任何两个整数 $d \geqslant 3$ 和 $g \geqslant 3$，存在一个图 G，它

有下列性质：

(1) G 是 d 度正则的；

(2) G 的围长是 g；

(3) G 是哈密顿的；

(4) 长度为 g 的各个圈是线不相交的，并且构成 G 的一个 2-因子；

(5) G 是这个 2-因子和 $(d-2)$ 个 1-因子的和。

（萨克斯[S9]）

9.12　给出分 $K_{4,4}$ 为生成林的一个最小分解。

9.13 求最小的连通 (p, q) 图 G，使

$$\max_r\{q_r/(r-1)\} > \{q/(p-1)\},$$

其中 q_r 是 G 的任何一个有 r 个点的导出子图中线的最多数目。

第十章 覆　盖

通过不在某一条直线上的一个点，可以作唯一的一条直线与给定的直线没有公共点。

——欧几里得

通过不在某一条直线上的一个点，不能作一条直线与给定的直线没有公共点。

——黎曼

通过不在某一条直线上的一个点，可以作两条以上直线与给定的直线没有公共点。

——波里艾

自然而然地我们可以称 G 的一条线 $x=uv$ 覆盖 u 和 v。类似地，我们可以将每一个点看作覆盖关联于它的所有的线。按照这种观点，我们定义 G 的两个不变量：覆盖所有的线(点)的点(线)的最少数目。还有两个与此有关的不变量是不邻接的点和线的最多数目。任何一个图的这四个数满足几个关系。它们也引出了对特殊的点和线的研究，这些点和线用于覆盖的目的是临界的。这些概念自然而然地导致 G 的两个特殊的子图，称为线核与点核。存在这种子图的判定准则将用图的覆盖性质来建立。

1. 覆盖和独立性

若一个点和一条线互相关联，则称它们互相*覆盖*。覆盖一个图 G 的所有线的一个点集称为 G 的一个*点覆盖*，又称覆盖所有的点的一个线集为一个*线覆盖*。G 的各个点覆盖中点的最少数目称

为 G 的点覆盖数，记作 $\alpha_0(G)$ 或 α_0。类似地，$\alpha_1(G)$ 或 α_1 是 G 的各个线覆盖中线的最少数目，且称为 G 的线覆盖数。例如，$\alpha_0(K_p)=p-1$ 和 $\alpha_1(K_p)=[(p+1)/2]$。若一个点覆盖(线覆盖)含有 α_0 (分别地，α_1)个元素，就称它是极小的。要注意，一个点覆盖可能是最小的*但不是极小的。图 10.1 中的 6 个不是割点的点就给出这样的一个点集。同样情形对于线覆盖也成立。如关联于割点的 6 条线就是那样。

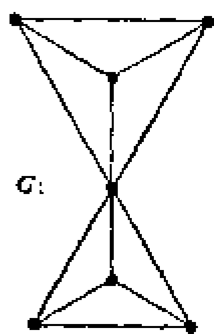


图 10.1 图 $K_4\cdot K_4$。

G 的一个点集中若没有两个点是邻接的，这个点集就称为是独立的。在各个独立点集中点的最多数目称为 G 的点独立数，记作 $\beta_0(G)$ 或 β_0。类似地，G 的线独立集是每两条线都不邻接的线集。各个独立线集的最大基数称为线独立数 $\beta_1(G)$ 或 β_1。对于完全图，$\beta_0(K_p)=1$ 和 $\beta_1(K_p)=[p/2]$。显然，$\beta_1(G)=p/2$ 当且仅当 G 有一个 1-因子。对于图 10.1 中的图 G，刚才定义的这些数为 $\beta_0(G)=2$ 和 $\beta_1(G)=3$。

对于这个图和 K_p，都有 $\alpha_0+\beta_0=\alpha_1+\beta_1=p$。加莱[G2]证明，这个恒等式总是成立的。

定理 10.1 对于任何一个非平凡的连通图 G，

$$\alpha_0+\beta_0=p=\alpha_1+\beta_1。$$

[证明] 令 M_0 为任何一个极大的独立点集，所以 $|M_0|=\beta_0$。因为没有一条线联结 M_0 的两个点，余下的有 $p-\beta_0$ 个点的集构成 G 的一个点覆盖，所以 $\alpha_0\leqslant p-\beta_0$。另一方面，若 N_0 是 G 的一个极小点覆盖，则没有一条线可以联结 G 的其余 $p-\alpha_0$ 个点中的任何两个，所以集 $V-N_0$ 是独立的。从而 $\beta_0\geqslant p-\alpha_0$，这就证明了第一个方程。

为了得到第二个等式，我们从一个有 β_1 条线的独立集 M_1 开始。对 G 中每一个不被 M_1 中的任何一条线覆盖的点取它的一条关联线构成一个线集，取 M_1 和这样构成的线集的并，就产生了一

* 即不能在其中再取出一个点，使余下的点集仍然是一个覆盖。——译注

个线覆盖 Y。因为 $|M_1|+|Y|\leqslant p$ 而 $|Y|\geqslant\alpha_1$，可得 $\alpha_1+\beta_1\leqslant p$。为了证明另一方向的不等式，让我们考虑 G 的一个极小线覆盖 N_1。显然，N_1 不能含有两个端点都与 N_1 中别的线关联的线，这就蕴含 N_1 是 G 的星形图的并(看作线的集)。若从这些星形图的每一个中选取一条线，我们得到线的一个独立集 W。现在，$|N_1|+|W|=p$ 而 $|W|\leqslant\beta_1$；于是，$\alpha_1+\beta_1\geqslant p$。定理证毕。

赫德尼米[H39]注意到，定理 10.1 的第一个方程

$$\alpha_0+\beta_0=p$$

的证明适用于一种更一般的情形。一个图 G 的一种性质 P 称为是传递的，若 G 的每一个子图也有这种性质。传递的性质例如有一个图为全不连通的、无圈的和二部的。G 的一个点集 S，若 G 的导出子图 $\langle S\rangle$ 有性质 P 就称 S 是一个 P-集；若 G 的每一个没有性质 P 的子图都含有 S 的点就称 S 是一个 $\bar{P}$-集。令 $\beta_0(P)$ 是 G 的一个 P-集的最大基数，而 $\alpha_0(P)$ 是一个 $\bar{P}$-集的点的最少数目。则下一个陈述的证明由定理 10.1 的证明立即可以得到。

系 10.1(a) 若 P 是 G 的一种传递的性质，则 $\alpha_0(P)+\beta_0(P)=p$。

一个图 G 的独立线的一个集有时称为 G 的一个匹配，因为它建立了与它关联的各个点的一个配对。因此，G 中的有 β_1 条独立线的一个集称为 G 的一个极大匹配。若 G 是二部的，则还有进一步的结果。下一个属于科尼希 [K9] 的定理与他的用矩阵的形式叙述的关于不同代表元素组的定理 5.18 有密切的关系。事实上，这是同一个结果。

定理 10.2 若 G 是二部的，则在一个极大匹配中线的数目等于点覆盖数，即 $\beta_1=\alpha_0$。

寻找一个极大匹配的问题，即所谓匹配问题，与寻找一个极小点覆盖的问题密切有关。

令 $M\subset X(G)$ 是 G 的一个匹配。一条交替 M-迹是任何两条连接的线中恰有一条在 M 中这种迹。一条可扩张 M 迹是一条交替 M-迹，并且它的两个端点都不关联于 M 的任何一条线。因为

M 是一个匹配,这样的迹一定是一条道路或一个圈。若 G 没有可扩张 M-迹,则匹配 M 称为是不可扩张的。显然,每一个极大匹配是不可扩张的;它的逆属于贝尔热[B10],下面给出的证明发表在诺曼和拉宾(Rabin)[NR1]中。

定理 10.3　每一个不可扩张匹配是极大的。

[证明]　令 M 是不可扩张的,且选一个极大匹配 M',使得在 M 中但不在 M' 中的线的数目 $|M-M'|$ 是最小的。若这个数是零,则 $M=M'$。否则,构造一条最长的迹 W,使它的线交替地在 $M-M'$ 和 M' 中。因为 M' 是不可扩张的,迹 W 不能同时以 $M-M'$ 中的线开始和结束*,所以 W 在 $M-M'$ 和 M' 中有同样多的线。现在由 M' 构成一个极大匹配 N,即将 W 中在 M' 中的线换成 W 中 $M-M'$ 中的线,则 $|M-N|<|M-M'|$,与 M' 的选法矛盾,证毕。

诺曼和拉宾[NR1]给出了一种算法,它基于下列的定理,用这种算法可以找到在一个给定的图中的全部极小线覆盖。令 Y 是 G 的一个线覆盖。若一条交替 Y-通道的端线都在 Y 中,并且它的两个端点除了关联于这条通道的端线外还关联于 Y 的其他线,则这条通道称为一条 Y-缩减通道。显然,每一个极小线覆盖没有缩减通道。

定理 10.4　若 Y 是 G 的一个线覆盖,对它不存在 Y-缩减通道,则 Y 是一个极小线覆盖。

G 的覆盖不变量 α_0 和 α_1 是考虑点覆盖线或者线覆盖点所需要的数目得到的。我们也可以将每个点看作覆盖它自己,而两个相邻接的点看作互相覆盖,对线也是这样。这就出现了另外的不变量。

令 α_{00} 是覆盖 V 所需要的点的最少数目,且令 α'_{00} 是覆盖 V 的独立的点的最少数目**。于是这些数都对任何一个图都有定义。

---

* 同理,W 不能同时以 M' 中的线开始和结束。——译注

** 贝尔热[B12]称 α_{00} 为"外固数(external stability number)",β_0 为"内固数(internal stability number)"。

令 α_{11} 和 α'_{11} 对线被线覆盖有类似的意义。格普塔 (Gupta) [G11] 得到了这些不变量之间的关系。

定理 10.5 对任何一个图 G,

$$\alpha_{00} \leqslant \alpha'_{00}, \quad \alpha_{11} = \alpha'_{11}\text{。}$$

2. 临界点和临界线

显然,若 H 是 G 的一个子图,则 $\alpha_0(H) \leqslant \alpha_0(G)$。特别地,这个不等式对于任何点 v 或线 x 当 $H = G - v$ 或 $H = G - x$ 时成立。若 $\alpha_0(G-v) < \alpha_0(G)$, 则称 v 是一个临界点*; 若 $\alpha_0(G-x) < \alpha_0(G)$,则称 x 是 G 的一条临界线。显然,若 v 和 x 是临界的,可得 $\alpha_0(G-v) = \alpha_0(G-x) = \alpha_0 - 1$。临界点的特征很容易给出。

定理 10.6 一个图 G 中的一个点 v 是临界的当且仅当有某个极小点覆盖含有 v。

[证明] 若 M 是 G 的一个含 v 的极小点覆盖,则 $M - \{v\}$ 覆盖 $G-v$; 从而 $\alpha_0(G-v) \leqslant |M - \{v\}| = |M| - 1 = \alpha_0(G) - 1$, 所以 v 在 G 中是临界的。

令 v 是 G 的一个临界点, 考虑 $G-v$ 的一个极小点覆盖 M'。集 $M' \cup \{v\}$ 是 G 的一个点覆盖, 且因为它比 M' 多含一个元素, 所以是极小的。

若由 G 中移去一条线 $x = uv$ 会使点覆盖数减小, 则移去 u 或 v 也一定会产生一个有较小的点覆盖数的图。于是, 若一条线是临界的,它的两个端点就都是临界的。若一个图有临界点,它不一定有临界线; 例如, C_4 的每个点是临界的而没有一条线是临界的。

一个图若其中每个点都是临界的,就称这个图是*点临界的*; 又若其中每条线都是临界的,就称这个图是*线临界的*。于是,一个图 G 是点临界的当且仅当 G 的每个点在 G 的某个极小点覆盖中。由我们前面的注记, 每个线临界图都是点临界的。在线临界图中有完全图,奇数长度的圈和图 10.2 中的图。

---

* 在本章中, "临界"是对覆盖而言的; 在第十二章中, 这个词对着色而言。由上下文可以区别它们的含义。

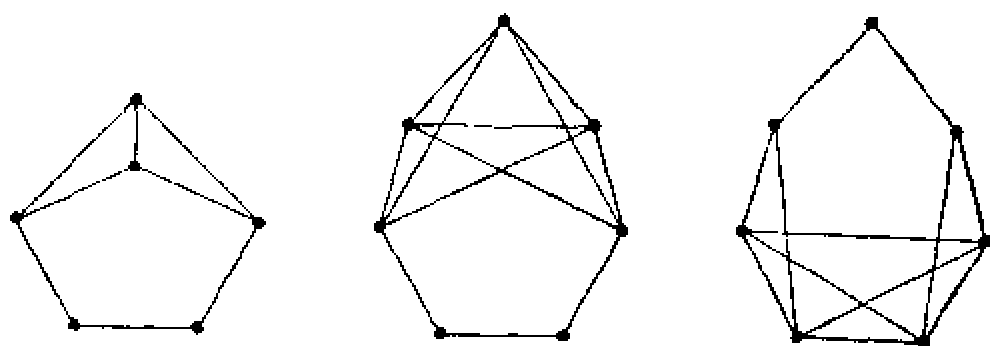


图 10.2 线临界图。

现在还不知道线临界图的结构的判定准则；然而，下列拜内克，哈拉里和普卢默[BHP1]的定理的两个系中的第一个给这种图以一个颇为严格的条件。

定理 10.7 一个图的任何两条邻接的临界线在一个奇圈上。

系 10.7(a) 每一个线临界图是一个块，其中任何两条邻接的线在一个奇圈上。

定理 10.7 是推广了属于达尔迈奇 (Dulmage) 和门德尔松 (Mendelsohn) [DM1]的下列结果得出的。

系 10.7(b) 一个二部图的任何两条临界线是独立的。

3. 线核和点核

一个图 G 的线核* $C_1(G)$ 是 G 的一个子图，它由所有（假如存在的话）使 $|Y|=\alpha_0(G)$ 的线的独立集 Y 的并导出。这个概念由达尔迈奇和门德尔松[DM1]引入。他们将这个概念作为他们的关于双图的分解理论的重要部分。一个图并不总是有线核。然而由定理 10.2，非全不连通的每个二部图有一个线核。作为没有线核的图的一个例，可以考虑一个奇圈 C_p。此处我们可得 $\alpha_0(C_p)=(p+1)/2$，但 $\beta_1(C_p)=(p-1)/2$，所以 C_p 没有线核。

哈拉里和普卢默 [HP19] 为一个图有线核给出了一个判定准则。一个以 V 为点集的图 G 的一个极小点覆盖 M 称为外部的，若对 M 的每一个子集 M'，$|M'|\leqslant|U(M')|$，其中 $U(M')$ 是 $V-M$ 中所有与 M' 的一个点邻接的点的集。

* 在[DM1]和[HP19]中称之为"核"。

定理 10.8　对任何一个图 G，下列陈述是等价的：

(1) G 有一个线核。

(2) G 有一个外部的极小点覆盖。

(3) G 的每一个极小点覆盖是外部的。

作为一个例，考虑图 10.3 中的图 G。这个图有两个极小点覆盖：$M_1=\{v_2, v_5, v_6\}$ 和 $M_2=\{v_3, v_5, v_7\}$。我们先考虑 M_1。若 $M_1'=M_1$，则 $U(M_1')=\{v_1, v_3, v_4, v_7\}$。对 $M_1''=\{v_5, v_6\}$，$U(M_1'')=\{v_3, v_4, v_7\}$。我们注意到 $|M_1'|\leqslant|U(M_1')|$ 和 $|M_1''|\leqslant|U(M_1'')|$。对于 M_1 的任何子集这都成立；从而按定义，M_1 是外部的。显然 M_2 也是外部的。

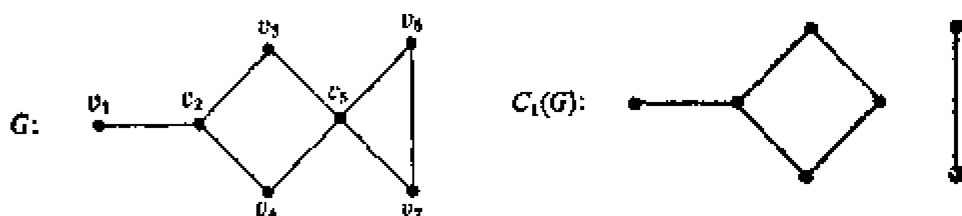


图 10.3　一个图和它的线核。

另一方面，存在等于自己的线核的图。这族图的特征由下列 [HP19] 中的定理给出。按达尔迈奇和门德尔松 [DM1] 的术语，我们考虑一个双图 G，它的点集 V 是不相交的并 $S\cup T$。若 G 恰有一个极小点覆盖 M，且或者 $M\cap S$ 是空的或者 $M\cap T$ 是空的，我们称 G 是半不可约的。其次，若它恰有二个极小点覆盖 M_1 和 M_2，且或者 $M_1\cap S=\phi$ 及 $M_2\cap T=\phi$ 或者 $M_1\cap T=\phi$ 及 $M_2\cap S=\phi$，称它是不可约的。最后，若它既不是不可约的又不是半不可约的，G 就称为是可约的。

定理 10.9　一个图 G 与它的线核 $C_1(G)$ 相等当且仅当它是二部的且不是可约的。

考虑图 10.4 中的双图 G_1 和 G_2。在 G_1 中，令 $S_1=\{v_3, v_6\}$ 和 $T_1=\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7\}$，双图 G_1 有唯一的极小点覆盖 $M_1=\{v_3, v_6\}$，且因为 $M_1\cap T_1=\phi$，G_1 是半不可约的，从而等于它的线核。在 G_2 中，令 $S_2=\{u_1, u_4, u_5\}$ 和 $T_2=\{u_2, u_3, u_6\}$。有两个极

小点覆盖，即 $M_2=\{u_1, u_4, u_5\}$ 和 $N_2=\{u_2, u_3, u_6\}$。然而，$M_2\cap T_2=\phi$ 且 $N_2\cap S_2=\phi$，从而 G_2 是不可约的并且也等于它的线核。

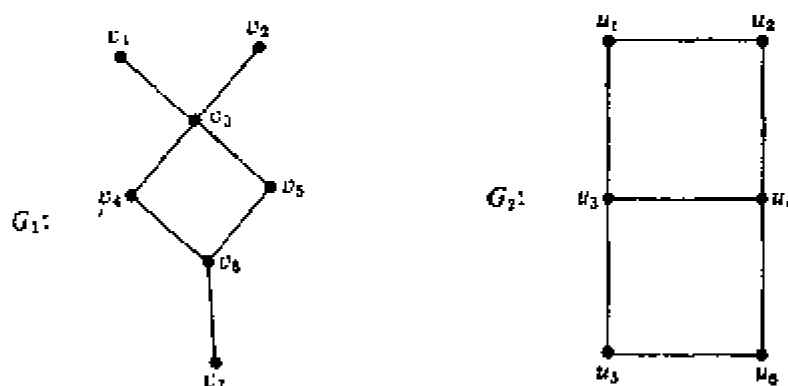


图 10.4 一个半不可约图和一个不可约图。

习题

10.1 证明或否定：一个图 G 的每一个点覆盖含有一个极小点覆盖。

10.2 证明或否定：每一个线的独立集在线的一个极大独立集中。

10.3 对任何一个图 G，$\alpha_0(G)\geqslant\beta_1(G)$ 和 $\alpha_1(G)\geqslant\beta_0(G)$。

10.4 求使 $\alpha_1(G)=\beta_1(G)$ 的一个必要且充分条件。

10.5 若 G 有一条闭迹含有一个点覆盖，则 $L(G)$ 是哈密顿的。

10.6 对任何一个图 G，$\alpha_0(G)\geqslant\delta(G)$。

10.7 若 G 是一个双图，则 $q\leqslant\alpha_0\beta_0$，等式仅对完全双图成立。

10.8 若 G 是一个完全 n-部图，则

a) $\alpha_0=\delta=\varkappa=\lambda$。

b) G 是哈密顿的当且仅当 $p\leqslant 2\alpha_0$。

c) 若 G 不是哈密顿的，则它的周长 $c=2\alpha_0$，且 G 有唯一的一个极小点覆盖。 (M. D. 普卢默)

d) $\beta_1=\min\{\delta, [p/2]\}$。

(夏特朗，盖勒和赫德尼米[CGH2])

10.9 a) 令 $\beta_{\varkappa}$ 是在一个使 $\langle S\rangle$ 不连通的集 $S\subset V(G)$ 中点的最多数目，则 $\varkappa=p-\beta_{\varkappa}$。

b) 类似地定义 β_{λ}, $\lambda=q-\beta_{\lambda}$。 （赫德尼米[H39]）

10.10 计算

a) $\alpha_{11}(K_p)$, b) $\alpha_{00}(K_{m,n})$, c) $\alpha_{11}(K_{m,n})$。

10.11 "象棋皇后"图将棋盘上的 64 个方格作为它的点，当皇后走一步可以从一个点到达另一个点时这两个点邻接；类似地定义象棋马图、象棋相图及象棋车图。对这四个图的每一个，数 α_{00} 等于多少？ （解见贝尔热[B12, pp. 41～42]）

10.12 α_0, α_{00} 和 α'_{00} 之间的一些关系如下：

a) $\alpha_{00}\leqslant\alpha_0$;

b) 对一些图，$\alpha_0<\alpha'_{00}$;

c) 对一些图，$\alpha'_{00}<\alpha_0$;

d) 对一些图，$\alpha_{00}<\alpha'_{00}$。

10.13 证明或否定：在一个图 G 中的一条线 x 是临界的当且仅当有一个极小线覆盖含有 x。

10.14 证明或否定：每一个 2-连通的线临界图是哈密顿的。

10.15 系 10.6(a) 的逆命题不成立。构造不是线临界的一个块，其中任何两条邻接的线在一个奇圈上。

10.16 一个树 T 等于它的线核当且仅当 T 是一个块-割点树。 （哈拉里和普卢默[HP19]）

10.17 对任何一个图 G，下列陈述是等价的：

1. G 有一个线核。
2. $\alpha_0(G)=\beta_1(G)$。
3. $\alpha_1(G)=\beta_0(G)$。 （哈拉里和普卢默[HP19]）

10.18 若 G 是有线核 $C_1(G)$ 的连通图，则

a) $C_1(G)$ 是 G 的一个生成子图；

b) $C_1(C_1(G))=C_1(G)$;

c) $C_1(G)$ 的各个支是 G 的二部子图，它们不是可约的。

（哈拉里和普卢默[HP19]）

10.19 若 G 是有线核 $C_1(G)$ 的一个图，B 是 G 的一个二部子图，它真含 $C_1(G)$，则 B 是可约的。

(哈拉里和普卢默[HP19])

10.20 点核 $C_0(G)$ 是 G 的一个子图，它由所有有 $\alpha_1(G)$ 个点的独立集 S 的并导出。一个图 G 有一个点核当且仅当它有一个线核。

(哈拉里和普卢默[HP18])

10.21 若 $G=C_0(G)$，则 G 有一个 1-因子。

(哈拉里和普卢默[HP18])

10.22 若 G 是 n 度正则的，则有分 V 为至多 $1+[n/2]$ 个子集的一个划分 V，使得每一个点与同一个子集中至多一个另外的点邻接。

(格伦塞(Gerencsér)[G6])

第十一章 可 平 面 性

跟我一起回到弗莱特兰德平原去一下，我就给你看那个你老是推测和想念着的东西。

——E·A·艾波特：《弗莱特兰德》

拓扑图论是欧拉在1736年首先发现的($V-E+F=2$)，但是接着就中断了191年。当库拉托斯基(Kuratowski)发现了判定一个图为可平面图的准则时，这个方向才开始复苏。拓扑图论的另一个先驱者是惠特尼，他得到了将图嵌入平面内的某些重要性质。

我们要提出所有已知的判定可平面性的准则。其中包括库拉托斯基和瓦格纳(Wagner)的定理，这个定理用禁用子图给出了可平面性的特征；还有惠特尼的用组合对偶的存在性给出的结果和麦克莱恩(MacLane)的用预先给定的圈基的存在性给出的描述。

将引进一个图的几个拓扑不变量。我们求出了完全图和完全二部图的亏格，求出了其中"大多数"图的厚度，但是只求出了少数几个图的叉数。

1. 平面图和可平面图

一个图称为被嵌入一个曲面S内，若它已经画在S上而任何两条边都不相交。如在第一章中已经说过，我们将对抽象的图用"点"和"线"，而对几何的图(嵌入了某个曲面内)用"顶点"和"边"。一个图如果可以嵌入平面，它称为是可平面的；已经嵌入平面内的一个图称为平面图。例如，图11.1(a)中的三次图是可平面的，因为它同构于在图11.1(b)中的平面图。

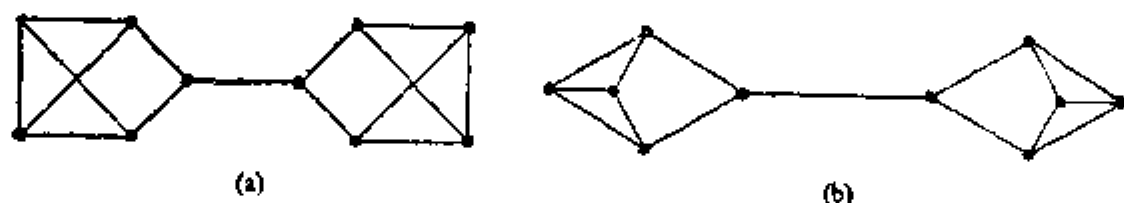


图 11.1 一个可平面图和一种嵌入。

由一个平面图限定的各个区域我们将称为它的面。无界的区域称为外部面。当一个平面图的一个面的界是一个圈时我们有时将这个圈就看作一个面。图 11.2 的平面图有三个面，f_1，f_2 和外部面 f_3。当然，只有 f_2 的界是一个圈。

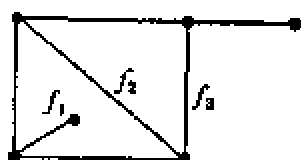


图 11.2 一个平面图。

可平面图这个论题是欧拉在他对多面体的探讨中发现的。每个多面体联系着一个图，这个图只由它的顶点和它的边组成，称为它的 1-骨架。例如，图 Q_3 是立方体的 1-骨架，而 $K_{2,2,2}$ 是八面体的 1-骨架。多面体的欧拉公式是数学的经典结果之一。

定理 11.1 （欧拉多面体公式）对任何一个有 V 个顶点，E 条边和 F 个面的球形多面体，

$$V-E+F=2。\tag{11.1}$$

对 3-方体，我们有 $V=8$，$E=12$ 和 $F=6$，所以(11.1)成立；对一个四面体，$V=F=4$ 和 $E=6$。在证明这个方程以前，我们将用图论的术语将它改述一下。一个平面地图是一个连通的平面图与它的所有的面。对于一个平面地图，可以用顶点的数目 p，边的数目 q 和面的数目 r 将(11.1)改写为

$$p-q+r=2。\tag{11.1'}$$

用归纳法来证明这个定理是很容易的，然而，这个方程在第四章中就已经被证明了。那里证明了，一个连通图 G 的圈秩 m 由下式给出：

$$m=q-p+1。$$

因为容易看出，若 (11.1′) 对 G 的各个块分别成立时它对 G 也成

立，所以我们一开始就假定 G 是 2-连通的。于是 G 的一个平面嵌入的每一个面是一个圈。

我们刚才对于一个平面地图记 $p=V$ 和 $q=E$。只要联系 m 与 F 就可以了。我们现在证明一个平面图 G 的各内部面构成 G 的一个圈基，所以它们有 m 个。因为 G 的每个圈 Z 的边可以看作含于 Z 中的 G 的各个面的对称差，所以要证明的命题成立。因为外部面是所有内部面（看作边的集合）的和 (mod2)，我们见到 $m=F-1$。从而，$m=q-p+1$ 成为 $F-1=E-V+1$。

欧拉方程有许多推论。

系 11.1(a)　若 G 是一个 (p, q) 平面地图，其中每个面是一个 n 圈，则

$$q=n(p-2)/(n-2)。\tag{11.2}$$

［证明］　因为 G 的每一个面是一个 n-圈，G 的每一条线在两个面上，且每个面有 n 条边。于是 $nr=2q$，将它代入(11.1′)就给出所要证的结果。

一个最大可平面图是一个可平面图，对它不能再加入线而不失去可平面性。以 $n=3$ 和 4 代入(11.2)给出下列结果。

系 11.1(b)　若 G 是一个 (p, q) 最大平面图，则每个面是一个三角形，且 $q=3p-6$。若 G 是一个平面图，其中每一个面是一个 4-圈，则 $q=2p-4$。

因为在一个平面图中，当每个面是一个三角形时边的数目最多，我们得到用线的数目表达的一个图可平面性的一个必要条件。

系 11.1(c)　若 G 是任何一个可平面的 (p, q) 图，$p\geqslant 3$，则 $q\leqslant 3p-6$。若 G 是 2-连通的而且没有三角形，则 $q\leqslant 2p-4$。

系 11.1(d)　图 K_5 和 $K_{3,3}$ 是不可平面的。

［证明］　(5, 10)图 K_5 是不可平面的，因为 $q=10>9=3p-6$；对 $K_{3,3}$，$q=9$ 而 $2p-4=8$。

如我们即将见到，图 K_5 和 $K_{3,3}$ 在给出可平面图的特征方面起重要的作用。上述系在研究可平面图，特别是最大可平面图时是极其有用的。

系 11.1(e)　每一个 $p\geqslant 4$ 的可平面图 G 至少有四个点的度不超过 5。

显然，一个图是可平面的当且仅当它的每个支是可平面的。惠特尼[W12]证明了，在研究可平面性时只要考虑 2-连通图就够了。

定理 11.2　一个图是可平面的当且仅当它的每一个块是可平面的。

直观上显然可见，任何一个可平面图可以嵌入球面。反过来也成立。这个事实使我们可以用许多种不同的方式将一个可平面图嵌入平面。

定理 11.3　每一个 2-连通平面图可以嵌入平面使任何一个特定的面成为外部面。

[证明]　令 f 是一个平面块 G 的一个非外部面。将 G 嵌入球面。称 f 内部的某个点为"北极"。考虑一个平面切球面于南极，并且由北极将 G 投影* 到这个平面上，得到一个同构于 G 的平面图，其中 f 为外部面。

系 11.3(a)　每一个可平面图可以嵌入平面，使一条预定的线为外部区域的一条边。

惠特尼也证明了每一个最大可平面图是一个块，还有

定理 11.4　每一个有 $p\geqslant 4$ 个点的最大可平面图是 3-连通的。

有五种办法可以将 3-连通的轮形图 W_5 嵌入平面：一种看起来象图 11.3(*a*)，而另外四种看起来象图 11.3(*b*)。然而，W_5 嵌

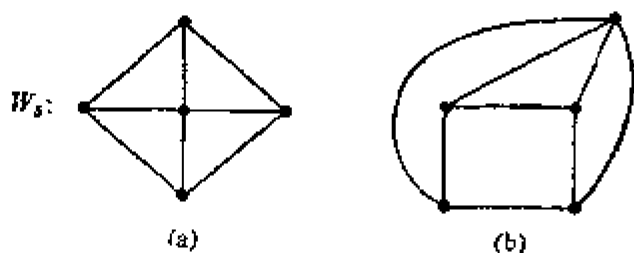


图 11.3　平面的轮形图。

* 这种投影通常称为球极平面投影。

入球面只有一种办法。这个结果对所有的3-连通图都成立（惠特尼[W13]）。

定理 11.5　每一个3-连通可平面图可以唯一地嵌入球面。

为了表明3-连通性的必要性，考虑图11.4中的连通度为2的同构图 G_1 和 G_2。当嵌入球面时，图 G_1 的各个区域中没有一个区域的界是5条边，而 G_2 有两个区域的界是5条边。



图**11.4**　一个2-连通图的两种平面嵌入。

一个多面体是凸的，若联结它的任何两点的直线段全部在这个多面体内。下一个定理属于施泰尼兹(Steinitz)和拉德梅克(Rademacher)[SR2]。

定理 11.6　一个图是一个凸3维多面体的1-骨架当且仅当它是可平面的和3-连通的。

可平面图理论中最诱人的研究领域之一是将一个图作为组合客体又作为几何图形来考虑它们的相互制约。问题往往是从对一个图加以几何约束引起的。例如，瓦格纳[W1]，法里(Fáry)[F1]和斯坦(Stein)[S15]独立地证明了，每一个可平面图可以以直的边嵌入平面。

定理 11.7　每一个可平面图同构于一个平面图，它所有的边都是直线段。

2. 外可平面图

若一个可平面图可以嵌入平面而使它的所有顶点在同一个面上，它就称为是外可平面的；我们通常将这个面选为外部面。图11.5中画出了一个外可平面图(*a*)和两个外平面嵌入(*b*)和(*c*)。在(*c*)中所有的顶点在外部面上。

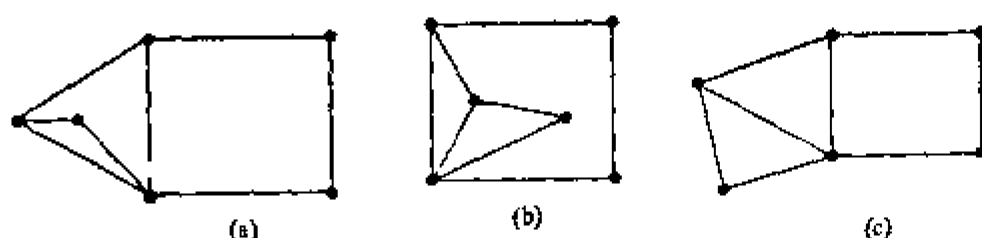


图 11.5　一个外可平面图及两种外平面嵌入。

在这一节中，我们导出一些关于外可平面图的定理，它们平行与可平面图的定理。立即可以得到一个类似于定理 11.2 的定理。

定理 11.8　一个图 G 是外可平面的当且仅当它的每一个块是外可平面的。

一个外可平面图 G 是最大外可平面的，若不能再加上线而不失去外可平面性。显然，每一个最大外平面图是一个多边形的一个三角剖分，而每一个最大平面图是球面的一个三角剖分。有 6 个顶点的三个最大外平面图画在图 11.6 中。

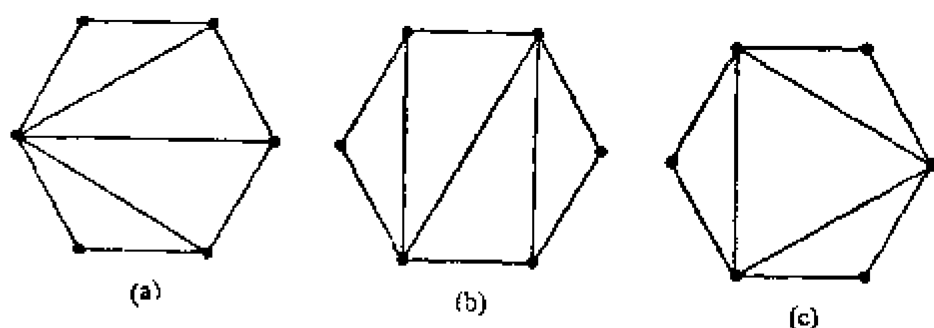


图 11.6　三个最大外可平面图。

定理 11.9　令 G 是一个最大外平面图，有 $p\geqslant 3$ 个均在外部面上的顶点，则 G 有 $p-2$ 个内部面。

〔证明〕　显然这个结果对 $p=3$ 成立。假定它对 $p=n$ 成立，又令 G 有 $p=n+1$ 个顶点和 m 个内部面。显然 G 一定有一个度等于 2 的顶点 v 在它的外部面上。构成 $G-v$。我们使内部面的数目减少了 1。所以 $m-1=n-2$，于是 $m=n-1=p-2$，即 G 的内部面的数目。

这个定理有几个推论。

系 11.9(a)　每一个有 p 个点的最大外可平面图 G 有

a) $2p-3$ 条线；

b) 至少 3 个点的度不超过 3;

c) 至少 2 个点的度等于 2;

d) $\varkappa(G)=2$。

K_4 和 $K_{2,3}$ 的所有平面嵌入均具有图 11.7 中的形式，其中，每一种形式都有一个顶点在外部圈的内部。所以，这两个图都不是外可平面的。按[CH3]，现在我们看到，这是两种基本的非外可平面图。

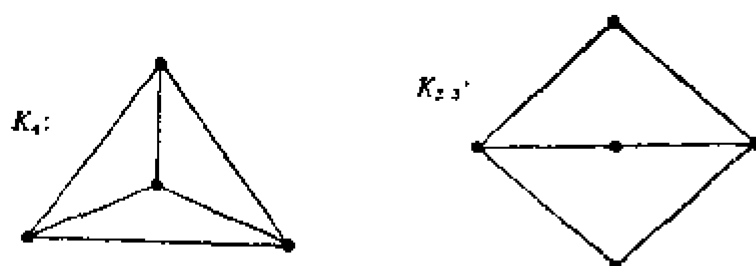


图 **11.7**　外可平面性的禁用子图。

两个图是*同胚的*，若它们都可以从同一个图通过一系列线的细分得到。例如，任何两个圈都是同胚的。图 11.8 中画出了 K_4 的一个同胚象。

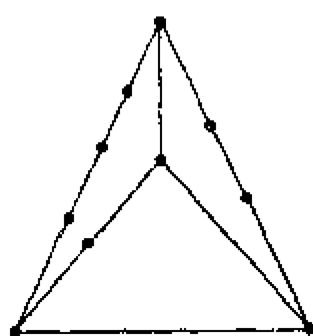


图**11.8**　K_4 的一个同胚象。

定理 11.10　除等同两个圈的各一条线得到的图外，一个图是外可平面的当且仅当它没有同胚于 K_4 或 $K_{2,3}$ 的子图。

探究有某种给定的性质的图的补图往往是重要的。对于可平面图，下列定理首先由巴特尔 (Battle)，哈拉里和科达马 [BHK1] 发现，而后由托特 [T16] 给出了一个不那么笨拙的证明，它对于一个可平面图的补图是可平面图提供了一个充分条件。

定理 11.11　每一个至少有 9 个点的可平面图的补图是不可

平面的，而 9 是这种数目中最小的一个。

这个结果用穷举法证明。还不知道有简洁的证法，甚至还没有一种推理的证法。

对外可平面图的一个类似的结果在[G5]中作出。

定理 11.12　每一个至少有 7 个点的外可平面图的补图不是外可平面的，而 7 是这种数目中最小的一个。

［证明］　为证明第一部分，只要验证每一个有 7 个点的最大外可平面图的补图不是外可平面的就可以了。因为恰有 4 个最大的 $p=7$ 的外可平面图（图 11.9），而其中每一个的补图容易看出都不是外可平面的，所以结果成立。最小性由下列事实得到：图 11.6(b)中的有 6 个点的（最大）外可平面图的补图是外可平面的。

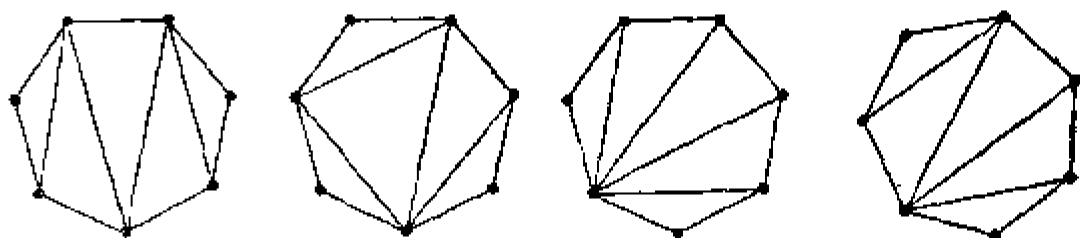


图 11.9　四个有 7 个点的最大外可平面图。

3. 库拉托斯基定理

直到库拉托斯基的论文 [K14] 发表为止，给出可平面图的特征的问题一直是一个悬而未决的问题。这个定理的下述证明是基于迪拉克和舒斯特 (Schuster) 所作的证明 [DS1]。

定理 11.13　一个图是可平面的当且仅当它没有同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

［证明］　因为由系 11.1(d)，K_5 和 $K_{3,3}$ 是不可平面的，就得到若一个图含有一个同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图它就也不是可平面的。

逆命题的证明要复杂得多。假定它不成立，则有一个不可平面图，它没有同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。令 G 是任何一个线的数目最少的这种图，则 G 一定是一个块且 $\delta(G)\geqslant 3$。令 $x_0=u_0v_0$ 是

G 的任意一条线，图 $F=G-x_0$ 一定是可平面的。

我们将见到，利用两个引理来展开证明是方便的。

引理 11.13(a)　F 中有一个含有 u_0 和 v_0 的圈。

引理的证明　假定 F 中没有含有 u_0 和 v_0 的圈，则由定理 3.3，u_0 和 v_0 在 F 的不同的块中。从而存在 F 的一个割点 w，它在每一条 u_0-v_0 道路上。如果 F 中没有线 wu_0 和 wv_0，我们将它们加入 F 中以构成一个图 F_0。在图 F_0 中，u_0 和 v_0 依旧在不同的块中，例如 B_1 和 B_2。这两个块一定有一个公共点 w。B_1 和 B_2 一定都比 G 的线少，所以 B_1 或者是可平面的或者含有一个同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。然而，如果加入 wu_0 后产生了 B_1 的一个同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图 H，则用以线 x_0 开始的从 u_0 到 w 的一条道路来代替 wu_0，得到的 G 的子图一定同胚于 H，从而也同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$，但这是一个矛盾。从而 B_1，类似地 B_2，是可平面的。按系 11.3 (a)，B_1 和 B_2 都可以画在平面上使得 wu_0 和 wv_0 是外部区域的界。从而可以将图 F_0 嵌入平面，使 wu_0 和 wv_0 都在外部区域上。加入 x_0 不可能破坏 F_0 的可平面性。因为 G 是 F_0+x_0 的一个子图，G 就是可平面的；这个矛盾证明了在 F 中存在一个含有 u_0 和 v_0 的圈。

将 F 嵌入平面，使得含有 u_0 和 v_0 的一个圈 Z 具有数目最多的区域在它的内部。指定 Z 的边的方向使成为一个循环。又令 $Z[u, v]$ 记沿着 Z 从 u 到 v 的定向道路。若 v 在 Z 上不是紧跟着 u 的，我们也用 $Z(u, v)$ 来记在 $Z[u, v]$ 中移去 u 和 v 得到的子道路。

圈 Z 的外部是指由 Z 外面的顶点导出的 F 的子图，而这个子图的支称为 Z 的外部支。Z 的一个外片是指 F 的一个子图，它由关联于至少一个在某一个外部支中的顶点的所有的边导出*，或者是由在 Z 的外部且与 Z 的二个顶点接触的一条边（若这样的边存在）所导出。类似地，我们定义圈 Z 的内部，内部支和内片。

---

* 这样的一个外片由一个外部支及所有联结这个外部支的一个顶点与圈 Z 上一个顶点的边组成。——译注

一个外片或一个内片称为是分离 u-v 的，若它与 $Z(u,\ v)$ 和 $Z(v,\ u)$ 都接触。显然，若 u 和 v 在 Z 上邻接，任何一个外片或内片都不能是分离 u-v 的。

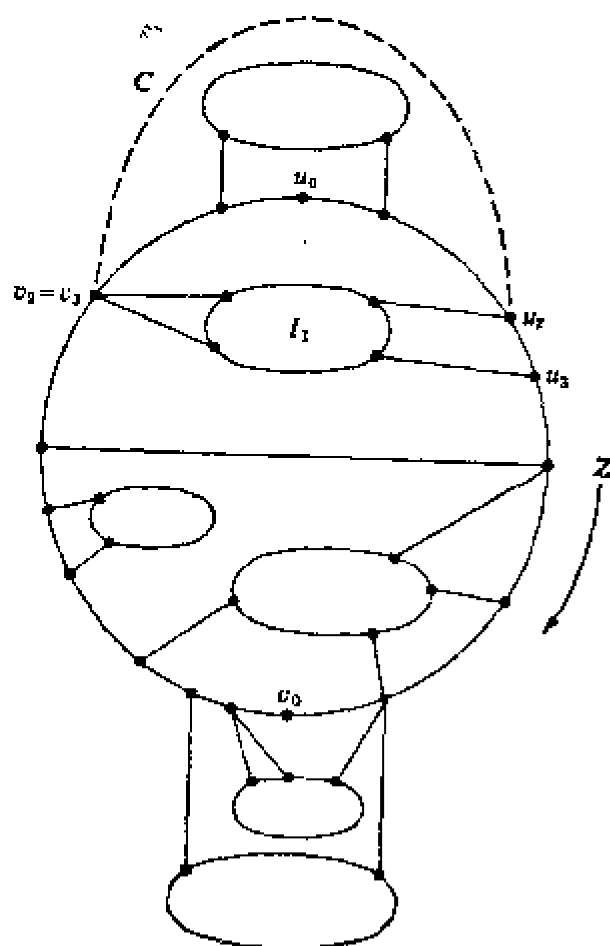


图 **11.10**　说明引理的分离圈 Z。

因为 F 是连通的，每一个外片都一定与 Z 接触；而且因为 F 没有割顶点，每一个外片一定至少有二个与 Z 公共的顶点。没有一个外片可以与 $Z(u_0,\ v_0)$ 或 $Z(v_0,\ u_0)$ 在一个以上顶点处接触，因为否则就有一个含 u_0v_0 的圈有比 Z 多的内部区域。同理，没有一个外片可以与 u_0 或 v_0 接触。从而，每一个外片与 Z 恰在二个顶点处接触，且是分离 u_0-v_0 的。此外，因为不能在 F 中加入 x_0 而仍保持可平面性，所以至少有一个分离 u_0-v_0 的内片。

引理 11.13(b)　存在一个分离 u_0-v_0 的外片，它与 $Z(u_0,\ v_0)$ 接触于例如 u_1，与 $Z(v_0,\ u_0)$ 接触于例如 v_1，使得存在一个内片，它既是分离 u_0-v_0 的，又是分离 u_1-v_1 的。

引理的证明　假定引理不成立。参见图 11.10 将有助于了解这个证明。

为了将分离 u_0-v_0 的内片重新安放在平面上，我们将它们进行编号。考虑任何一个离 u_0 最近的分离 u_0-v_0 的内片 I_1，也就是说，从 u_0 沿着 Z 移动时最先遇到这个内片的点。继续逐步远离 u_0，我们将分离 u_0-v_0 的内片记作 I_2，I_3 等等。

令 u_2 和 u_3 是 I_1 的接触 $Z(u_0,\ v_0)$ 的第一个和最后一个顶

点*，而 v_2, v_3 是 I_1 的接触 $Z(v_0, u_0)$ 的第一个和最后一个顶点。每一个外片与 Z 的两个公共顶点必然或者都在 $Z[v_3, u_2]$ 上或者都在 $Z[u_3, v_2]$ 上，因为否则将存在一个外片接触 $Z(u_0, v_0)$ 于 u_1，接触 $Z(v_0, u_0)$ 于 v_1，而有一个内片既是分离 u_0-v_0 的，又是分离 u_1-v_1 的，这与引理不成立的假定矛盾。所以可以在外部区域中画一条联结 v_3 和 u_2 的曲线 C，使它不与 F 的边接触(见图 11.10)。于是，I_1 可以保持可平面性转移到 C 的外面。类似地，其余分离 u_0-v_0 的内片也可以依次转移到 Z 的外面，使产生的图为平面图。然而，这样一来边 x_0 就可以加进去而不破坏 F 的可平面性，但这是一个矛盾。引理证毕。

定理的证明　令 H 是由引理 11.13(b) 保证的内片，它既是分离 u_0-v_0 的，又是分离 u_1-v_1 的。又令 H 分别接触 $Z(u_0, v_0)$，$Z(v_0, u_0)$，$Z(u_1, v_1)$ 和 $Z(v_1, u_1)$ 于顶点 w_0, w_0', w_1 和 w_1'。依赖于 Z 上这四个顶点的相对位置，现在要考虑以下四种情形。

情形 1.　顶点 w_1 和 w_1' 中有一个在 $Z(u_0, v_0)$ 上，而另一个在 $Z(v_0, u_0)$ 上。于是我们可以取例如 $w_0=w_1$ 和 $w_0'=w_1'$。在这

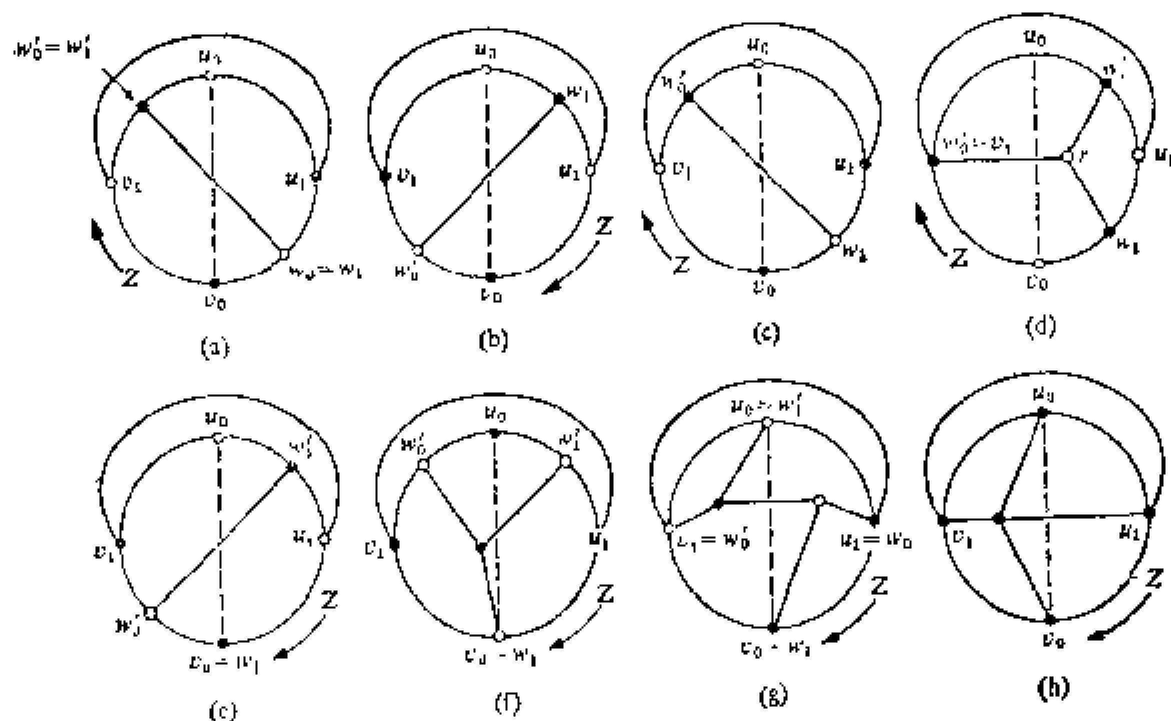


图 11.11　不可平面子图的各种可能性。

* 原书为"点(point)"，不妥，应为"顶点(vertex)"，今按文义改正。——译注

种情形下，如图 11.11(a)，G 含一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图。其中分别用空心的、实心的点来记顶点的两个集。

情形 2. 顶点 w_1 和 w_1' 都在 $Z(u_0, v_0)$ 上或者都在 $Z(v_0, u_0)$ 上。不失一般性，我们取第一种情形。有两种可能性：$v_1 \neq w_0'$ 或 $v_1 = w_0'$。若 $v_1 \neq w_0'$，则 G 含有一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图。依赖于 w_0' 在 $Z(u_1, v_1)$ 上或在 $Z(v_1, u_1)$ 上，分别如图 11.11(b) 或 (c)。若 $v_1 = w_0'$ (见图 11.11(d))，则 H 含一个顶点 r，存在由 r 开始到 w_1、w_1' 和 v_1 的三条不相交的道路，它们的所有顶点 (除了 w_1、w_1' 和 v_1 外) 都属于 H。这种情形下，G 也含有一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图。

情形 3. $w_1 = v_0$ 和 $w_1' \neq u_0$。不失一般性，令 w_1' 在 $Z(u_0, v_0)$ 上。G 又含一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图。若 w_0' 在 $Z(v_0, v_1)$ 上*，则如图形 11.11(e)，G 有一个子图同胚**于 $K_{3,3}$。另一方面，若 w_0' 在 $Z(v_1, u_0)$ 上，如图 11.11(f)，也有一个 $K_{3,3}$。若 $w_0' = v_1$，修改一下这个图形也容易看出 G 含有 $K_{3,3}$。

情形 4. $w_1 = v_0$ 且 $w_1' = u_0$。这里我们假定 $w_0 = u_1$ 和 $w_0' = v_1$，因为否则我们可以得到前面三种情形中的某一种。我们分二种子情形考虑。令 P_0 是 H 中从 u_0 到 v_0 的一条最短的道路，又令 P_1 是从 u_1 到 v_1 的一条最短的道路。道路 P_0 和 P_1 一定相交。若 P_0 和 P_1 有不止一个公共顶点，则如图 11.11(g)，G 含有一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图；否则，如图 11.11(h)，G 含有一个同胚于 K_5 的子图。

因为这些情形包括了所有可能情形，定理证毕。

托特在他的论文"如何画一个图" [T17] 中给出了一种算法来将一个给定的图尽可能多地画在平面上。并且证明了，当这个过程在没有画出全部图时就中断了的话，则它一定含有一个同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。于是，他的算法提供了定理 11.13 的一个独立的证明。

---

* 原书印误。——译注

** 原书为"有一个子图 $K_{3,3}$"，不对；下文"含有 $K_{3,3}$"也应理解为"含有一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图"——译注

一个图 G 的一个初等收缩由等同两个邻接的点 u 和 v 得到，即移去 u 和 v，再加上一个新点 w，使它邻接于所有邻接于 u 或 v 的点。一个图可收缩到一个图 H，若 H 可以从 G 通过一系列初等收缩得到。例如，在图 11.12(a) 和 11.12(b) 中指出，彼得森图可收缩到 K_5，只要将它的联结五边形和五角星的五条边 u_iv_i 每一条收缩到一个新点 w_i 就可以了。库拉托斯基定理的一个对偶形式(在拟阵理论的对偶意义下)独立地由瓦格纳 [W2] 和哈拉里和托特 [HT3] 得到。

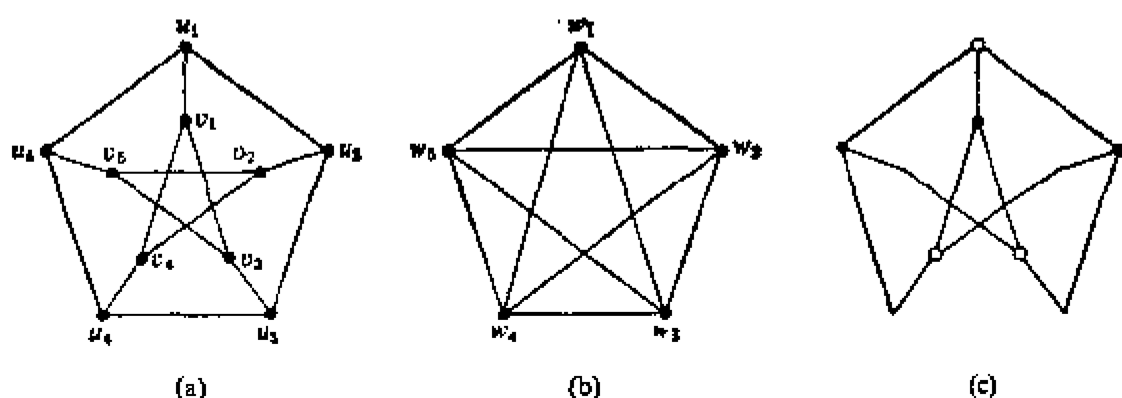


图 11.12　彼得森图的不可平面性。

定理 11.14　一个图是可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

我们刚才已经看到彼得森图可以收缩到 K_5。因为它的每个点的度等于 3，显然它没有一个子图同胚于 K_5；图 11.12(c)表明它的一个子图同胚于 $K_{3,3}$。

4. 可平面图的其他特征

自从库拉托斯基的初始工作以来，还发现了可平面性的几个别的判定准则。我们已经在定理 11.14 中用收缩的说法作出了"对偶形式"。托特将一个图画到平面上去的算法也可以算给出了一个特征。

惠特尼 [W12, W14] 用对偶图的存在性表达了可平面性。给定一个平面图 G，它的几何对偶 G^* 可以构造如下：在 G 的每个区域内(包括外部区域)放一个顶点，若两个区域有一条公共边 x，则

用一条仅仅穿过边 x 的边 x^* 来联结相应的顶点。结果总是产生一个平面伪图，如图 11.13，其中 G 的边是实线，而它的对偶 G^* 的边用虚线。显然，G^* 有一个环当且仅当 G 有一条桥，而 G^* 有多重边当且仅当 G 的两个区域至少有两条公共边。于是，一个2-连通平面图的对偶总是一个图或者一个多重图，而一个3-连通图的对偶总是一个图。几何对偶的其他例子由柏拉图图给出：四面体是自对偶的，立方体和八面体是对偶的，十二面体和二十面体是对偶的。

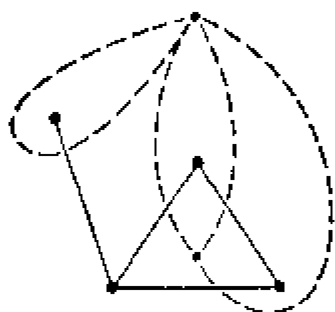


图 11.13 一个平面图和它的几何对偶。

由定义，一个连通的平面图 G 的几何对偶也是平面的，此外，G 的对偶的对偶是原来的图 G。然而，一个抽象的图如果在球面上有不止一种嵌入则能够产生不止一个对偶图。如在图 11.14 中，图 G 和 H 是抽象地同构的，但由于嵌入法的不同它们有不同的对偶 G^* 和 H^*。然而，如定理 11.5 所说，一个3-连通图仅有一种球面嵌入，它一定有唯一的几何对偶。

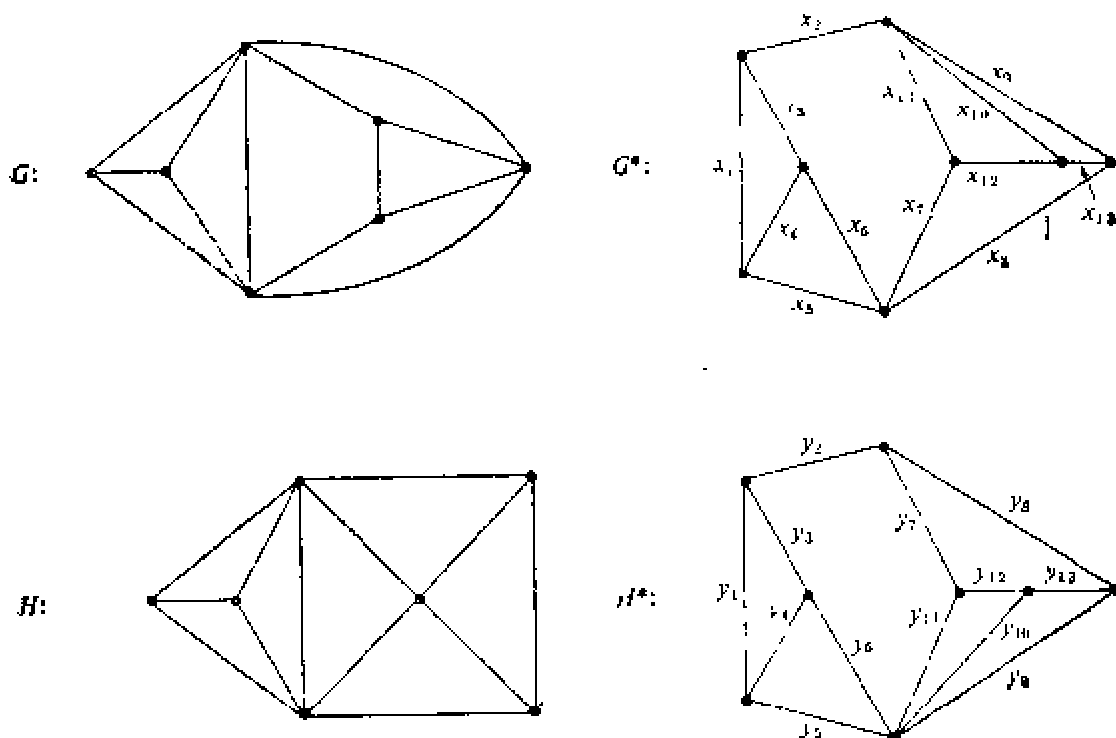


图 11.14 同一个抽象图的不同的几何对偶。

惠特尼给对偶以一个组合的定义，它是几何对偶的一种抽象的形式。为了叙述这个结果，我们回忆在第四章中说过，对于一个有 k 个支的图 G，圈秩由 $m(G)=q-p+k$ 给出，余圈秩由 $m^*(G)=p-k$ 给出。

G 的一个子图 H 的相对补图 $G-H$ 定义为去掉 H 的线得到的子图。一个图 G^* 是图 G 的组合对偶，若在它们的线集之间有一个一一对应，使得不论如何选定线的对应子集 Y 和 Y^*，

$$m^*(G-Y)=m^*(G)-m(\langle Y^*\rangle), \tag{11.3}$$

其中 $\langle Y^*\rangle$ 是以 Y^* 为线集的 G^* 的子图。现在用图 11.15 来说明这个定义，其中的对应为 $x_i\leftrightarrow y_i$。这里，$Y=\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$，所以 $m^*(G-Y)=1$，$m^*(G)=4$ 和 $m(\langle Y^*\rangle)=3$*，所以定义中的方程满足。用 (11.3) 去检验两个图是否对偶当然是非常困难的，因为这要求对 G 中每一个线集 Y 来验证这个方程。

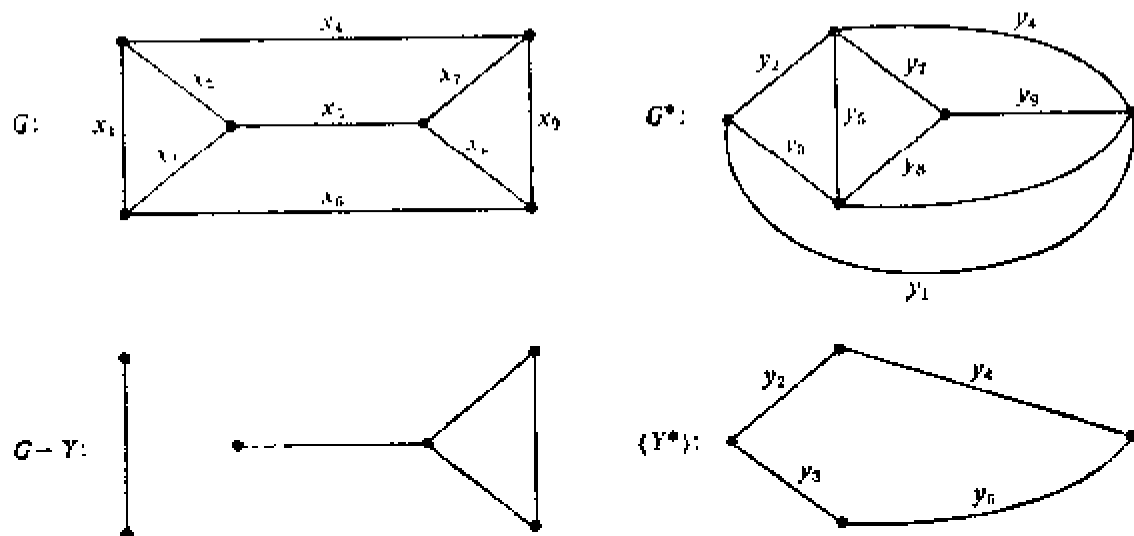


图 11.15　组合对偶。

与几何对偶相同，可平面图的组合对偶也不必唯一。然而，若两个图是两个同构的图的组合对偶，则它们的线集之间有一个一一对应，这个对应保持圈。这儿圈是作为线的集**(就是说，它们的圈拟阵是同构的)。在图 11.14 中，G^* 和 H^* 的对应 $x_i\leftrightarrow y_i$ 说明了这种情况。

* 原书印误。——译注

** 即对应图中对应线的排列可能不同。——译注

惠特尼证明了组合对偶等价于几何对偶，这给出了可平面性的另外一个准则。

定理 11.15 一个图是可平面的当且仅当它有一个组合对偶。

另外一个属于麦克莱茵［M1］的可平面性的准则是用圈的结构来表达的。

定理 11.16 一个图 G 是可平面的当且仅当 G 的每一个至少有三个点的块有一个圈基 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ 和另外一个圈 Z_0，使得每一条线出现在这 $m+1$ 个圈的正好二个之中。

我们仅指出必要性，它很容易得到。如在定理 11.1 的证明中所提到，一个 2-连通平面图 G 的所有内部面构成一个圈基 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$，其中 m 是 G 的圈秩。令 Z_0 是 G 的外部圈。则显然 G 的每一条边在 $m+1$ 个圈 Z_i 的正好二个之中。

为了证明条件的充分性，必须对一个给定的有所约定的性质的图 G 构造一个平面嵌入。

所有这些可平面性的判定准则总结在下表内，其中的各个条件对于一个图 G 是等价的。

(1) G 是可平面的。

(2) G 没有同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

(3) G 没有可收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

(4) G 有一个组合对偶。

(5) G 的每一个非平凡块有一个圈基 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ 和另外一个圈 Z_0，使得每一条线 x 出现在这 $m+1$ 个圈的正好二个之中。

5. 亏格、厚度、糙度、叉数

在这一节中，我们考虑一个图 G 的四个拓扑不变量。它们分别是亏格：为了把 G 嵌入球面所需要的环柄的数目；厚度：构成 G 所需要的可平面图的数目；糙度：G 中线不相交的不可平面子图的最多数目；叉数：把 G 画在平面上时必须有的交叉点的数目。我们将集中于三族图——完全图，完全双图和方体——且尽我们所知

指出它们对于这些不变量所取的值。

科尼希注意到，每个图都可以嵌入某个可定向的曲面。因为将任意的一个图 G 画在平面上时，就容易看出这时可能会有互相交叉的边，于是可以在每个交叉点处接一个环柄到平面上，让一条边通过这个环柄的上面而另一条边通过它的下面。例如，图 11.16 中画出了 K_5 在平面接上了一个环柄后的一个嵌入。当然，用这种方法往往要接上比实际所需要的更多的环柄。事实上，科尼希也证明了，一个图在一个可定向曲面上的任何一种用最少数目环柄的嵌入使得这个图的各个面都是单连通的。

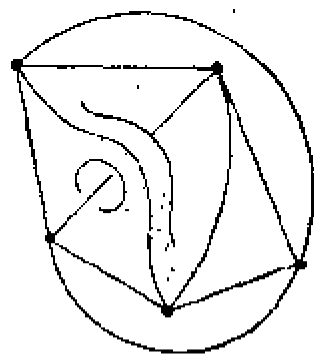


图 11.16　将一个图嵌入一个可定向的曲面。

我们说过，可平面图可以嵌入球面。一个圆环图可以嵌入圆环面。K_5 和 $K_{3,3}$ 都是圆环图；事实上，图 11.17 和 11.18 中已经画出了 K_7 和 $K_{4,4}$ 在圆环面上的嵌入，圆环面用熟知的矩形来表示，其中两对对边相等同。还没有找到圆环图的类似于库拉托斯基定理的特征。然而，沃尔默豪斯 (Vollmerhaus) [V6] 以肯定的答案解决了厄尔多斯的一个猜测，证明了对于圆环面和其他任何可定向的曲面有禁用子图的一个有限集。

一个图 G 的亏格 $\gamma(G)$ 是必须在球面上加上的环柄的最少数

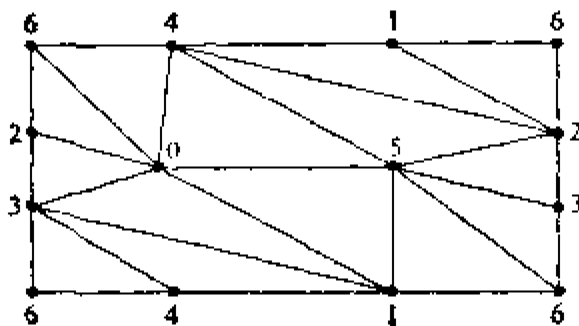


图 11.17　K_7 在圆环面上的一种嵌入。

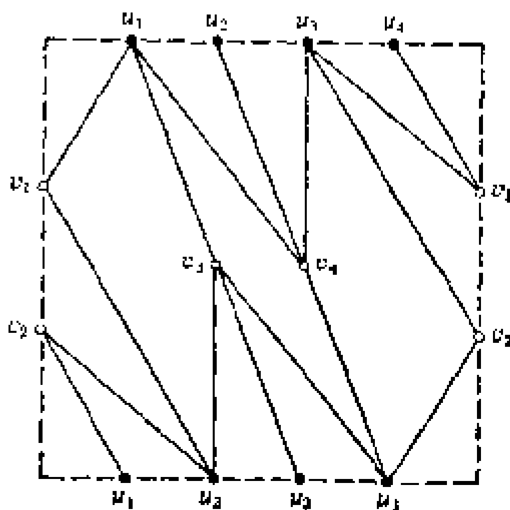


图 11.18　$K_{4,4}$ 的一种圆环面嵌入。

目，以致使得 G 可以嵌入到此曲面上。当然，$\gamma(G)=0$ 当且仅当 G 是可平面的，而且，同胚的图的亏格相等。

这一章中的第一个定理提出了球面多面体的欧拉特征方程，$V-E+F=2$。更一般地，一个多面体的亏格* 是需要接在球面上的环柄的数目，以致使得所形成的曲面成为一个含有这个多面体的曲面。定理 11.1 已经在一个也由欧拉得到的结果中被推广到有任意亏格的多面体。证明可见库兰特 (Courant) 和罗宾斯 (Robbins) [CR1]。

定理 11.17 对于一个亏格为 γ，有 V 个顶点，E 条边和 F 个面的多面体，

$$V-E+F=2-2\gamma。\tag{11.4}$$

这个方程在下面证明特殊图的亏格和厚度的结果中较容易的那一半时是特别有用的。不难导出的这个定理的一些系，它们用起来往往更加方便。

系 11.17(a) 若 G 是有亏格 γ 的一个连通图，其中每个面是一个三角形，则

$$q=3(p-2+2\gamma);\tag{11.5}$$

当每个面是一个四边形时，

$$q=2(p-2+2\gamma)。\tag{11.6}$$

如在 [BH2] 中提到，从这两个方程容易验证一个图的亏格有下列下界。

系 11.17(b) 若 G 是一个有亏格 γ 的连通图，则

$$\gamma\geqslant\frac{1}{6}q-\frac{1}{2}(p-2);\tag{11.7}$$

若 G 没有三角形，则

$$\gamma\geqslant\frac{1}{4}q-\frac{1}{2}(p-2)。\tag{11.8}$$

求完全图的亏格曾经是一个长期的，有趣的，困难的和成功的努力。在它的对偶形式下，作为希伍德猜想，从 1890 年到 1967 年

* 多面体定理的一种组合处理见格伦鲍姆[G10]。

一直没有被证明。我们在下一章中再回到问题的这个方面来。对于这个结果有许多人作出了贡献，而完全解决了这个问题的最后冲刺是由林格尔和杨斯(Youngs)[RY1]进行的。

定理 11.18　对于每一个正整数 p，完全图的亏格是

$$\gamma(K_p)=\left\{\frac{(p-3)(p-4)}{12}\right\}。\qquad(11.9)$$

方程(11.9)的较容易的一半的证明属于希伍德[H38]。它相当于将 $q(K_p)$ 代入方程(11.7)，得到

$$\gamma(K_p)\geqslant\frac{1}{6}\binom{p}{2}-\frac{1}{2}(p-2)=\frac{(p-3)(p-4)}{12}。$$

于是，因为每一个图的亏格是一个整数，所以

$$\gamma(K_p)\geqslant\left\{\frac{(p-3)(p-4)}{12}\right\}。$$

要证明这个表达式也是 $\gamma(K_p)$ 的上界，只能用给出在一个有指定的亏格的可定向的曲面上 K_p 的一种嵌入来完成。当希伍德在1890年开始表述这个猜想时，他证明了 $\gamma(K_7)=1$，如图11.17中的嵌入所示，它三角剖分了圆环面。

赫夫特(Heffter)在1891年对 $p=8$ 到12证明了(11.9)。直到1952年，才由林格尔对 $p=13$ 作出了证明。这时，由问题的形式察觉到，比较自然的是一次去解决模12的一个剩余类。记 $p=12s+r$，林格尔(见[R10])在1954年对 $r=5$ 的所有完全图 K_p 证明了(11.9)。在1961～65年，林格尔将这个结果推广到 $r=7$，10和3。同时，杨斯[Y1]和他的同事格斯丁(Gustin)，台里(Terry)和威尔基(Welch)解决了情形 $r=4, 0, 1, 9, 6$。在1967～68年，林格尔和杨斯[RY1, 2]一起工作完成了对 $r=2, 8, 11$ 的 K_p 的适当的嵌入。对孤立的情形 $p=18$、20和23，由这些方法仍旧不能证明。这个证明由蒙特派列尔(Montpellier)大学的一个名叫杰恩·迈耶(Jean Mayer)的法国文学教授完成了。他对 p 的这三个值嵌入了 K_p，见[M6]。

对于完全双图，相应的结果不如此复杂，而由林格尔单独得

到。当应用不等式(11.8)于图 $K_{m,n}$ 时，我们有

$$\gamma(K_{m,n}) \geqslant \frac{1}{4}mn - \frac{1}{2}(m+n-2) = \frac{(m-2)(n-2)}{4}。$$

另一个不等式由给出 $K_{m,n}$ 的一个适当的嵌入[R12]来证明。

定理 11.19 完全双图的亏格为

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\{\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right\}。 \tag{11.10}$$

方体的亏格由林格尔[R13]和拜内克和哈拉里[BH3]导出。对图 Q_n，我们有 $p=2^n$ 和 $q=n2^{n-1}$，故由(11.8)，

$$\gamma(Q_n) \geqslant 1+(n-4)2^{n-3}*$$

就证明了下一个方程的较容易的一半。

定理 11.20 方体的亏格为

$$\gamma(Q_n) = 1+(n-4)2^{n-3}。 \tag{11.11}$$

现在我们谈一些关于亏格的更一般的想法。正象定理 11.2 所推断，巴特尔、哈拉里、科达马和杨斯在[BHKY1]中证明了，一个图的亏格只依赖于它的块的亏格。

定理 11.21 若一个图 G 有块 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，则

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^{n}\gamma(B_i)。 \tag{11.12}$$

哈拉里和科达马[HK1]略为推广了这个结果。记得从定理 5.8 知道，一个图的两个 n-支至多有 n 个公共点。

定理 11.22 令一个 n-连通图 G 是两个 $(n+1)$-支 B 和 C 的并，令 $v_1, \cdots, v_n$ 是 $B\cap C$** 的点的集。将线 v_iv_j 加入 G，称得到的图为 G_{ij}。若当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时，$\gamma(G_{ij})=\gamma(G)+1$，则

$$\gamma(G) = \gamma(B)+\gamma(C)+n-1。 \tag{11.13}$$

我们在定理 11.11 中已经看到，每一个有 9 个点的可平面图的补图是不可平面的。将一个图 G 的厚度 $\theta(G)$ 定义为其并等于 G 的可平面子图的最少数目，则定理 11.11 可叙述为 $\theta(K_9)>2$。实际上，K_9 的厚度等于 3。但 K_9 在厚度方面是临界的，因为

---

* 原书印误。——译注

** 以记作 $\langle V(B)\cap V(C)\rangle$ 较妥。——译注

$\theta(K_9-x)=2$。所以对 $p=5$ 到 8, $\theta(K_p)=2$。当然 $\theta(G)=1$ 当且仅当 G 是可平面的。因为一个最大可平面图有 $q=3p-6$ 条线，这样可以得到对任何一个(p, q)图的厚度 θ 有一个界，

$$\theta \geqslant \frac{q}{3p-6}。\tag{11.14}$$

这个结果对于作出关于厚度的猜想和证明较容易的一半时是有用的。

完全图的厚度在 [BH5] 和拜内克[B6]中探讨。应用(11.14)于 K_p, 我们得到

$$\theta(K_p) \geqslant \frac{p(p-1)/2}{3(p-2)}。$$

应用一些代数变化，我们得到，

$$\theta(K_p) \geqslant \left[\frac{p(p-1)/2+3(p-2)-1}{3(p-2)}\right]=\left[\frac{p+7}{6}\right]。$$

定理 11.23　当 $p \not\equiv 4 \pmod 6$ 时，除了 $p=9$, 完全图的厚度等于

$$\theta(K_p)=\left[\frac{p+7}{6}\right]。\tag{11.15}$$

当 $p\equiv 4 \pmod 6$ 时，方程 (11.15) 有时成立，有时不成立。对 $\theta(K_{10})=3 \neq \left[\frac{17}{6}\right]$, 但霍布斯 (Hobbs) 和格罗斯曼 (Grossman) [HG1] 作出了分 K_{22} 为 $4=\left[\frac{29}{6}\right]$ 个可平面子图的分解。而拜内克[B6]证明了 $\theta(K_{28})=5=\left[\frac{35}{6}\right]$。最近，杰恩·迈耶(又是他！)得到了一种构造，从而证明 $\theta(K_{34})=6$ 和 $\theta(K_{40})=7$。在 $p\leqslant 45$ 的值中，只对于 $p=16$, $\theta(K_p)$ 还不知道，而猜想是 $\theta(K_{16})=4$*。对于所有 $p\geqslant 46$, (11.15) 成立。

完全双图的厚度在[BHM1]和拜内克[B7]中得到研究。

定理 11.24　完全双图的厚度等于

* 杰恩·迈耶已证明：$\theta(K_{16})=3$。见 *J. Combinatorial Theory*, B, **13** (1972), 71。——译注

$$\theta(K_{m,n})=\left\{\frac{mn}{2(m+n-2)}\right\}, \tag{11.16}$$

但可能除了 $m<n$, mn 为奇数，而且存在一个整数 k，使 $n=[2k(m-2)/(m-2k)]$ 时除外。

系 11.24(a)　$K_{n,n}$ 的厚度为 $[(n+5)/4]$。

对于方体的相应问题由克莱纳特(Kleinert)[K8]所解决。

定理 11.25　方体的厚度等于

$$\theta(Q_n)=\left\{\frac{n+1}{4}\right\}。 \tag{11.17}$$

P. 厄尔多斯(口头告知)当他试图叙述厚度的概念时犯了一个偶然的错误。他用含在一个给定的图 G 内线不相交的不可平面子图的最多数目这种讲法首先定义了*糙度* $\xi(G)$。于是，厚度和糙度都包含了在第九章的意义下将一个图因子分解为生成子图(分别为可平面的和不可平面的)的构造。对于完全图的糙度的公式不象对其他拓扑不变量的公式那样简洁。原因是 $K_{3,3}$ 从而还有它的同胚象对于糙度的构造是一种最方便的子图。这就说明了下述属于郭伊(Guy)和拜内克[GB1]的结果取这种形式的理由。图 11.19 中画出了含在 K_{10} 内的四个线不相交的 $K_{3,3}$ 的同胚象。

定理 11.26　完全图的糙度由下式给出，

$$\xi(K_{3n})=\begin{cases}\dbinom{n}{2} & (p=3n\leqslant 15),\\[2mm] \dbinom{n}{2}+\left[\dfrac{n}{5}\right] & (p=3n\geqslant 30);\end{cases}$$

$$\xi(K_{3n+1})=\binom{n}{2}+2\left[\frac{n}{3}\right]\quad (p=3n+1\geqslant 19 \text{ 和 } p\neq 9r+7); \tag{11.18}$$

$$\xi(K_{3n+2})=\binom{n}{2}+\left[\frac{14n+1}{15}\right]。$$

$\xi(K_p)$ 的所有值或者由(11.18)精确地知道，或者取表 11.1 中给出的值，或者比表中给出的值大 1；见[GB1]。

对于完全双图的糙度，拜内克和郭伊[BG1]的结果是不完全的而且包括好多种情形。

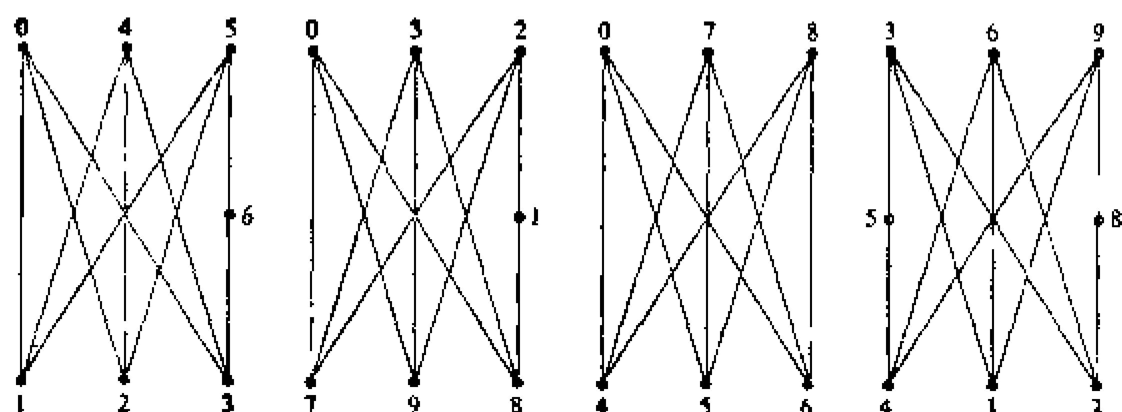


图 11.19　K_{10} 的四个不可平面子图。

表 11.1　$\xi(K_p)$ 的猜测值

p	13	18	21	24	27	$9n+7$
$\xi(K_p)$	7	15	21	28	36	$(9n^2+13n+2)/2$

定理 11.27　完全双图 $K_{m,n}$ 的粗度满足

$$\xi(K_{3r+d,3s+e})=rs+\min\left(\left[\frac{er}{3}\right],\ \left[\frac{ds}{3}\right]\right),$$

对 $d=0$ 或 1 和 $e=0$ 或 1。

$$\xi(K_{3r+2,3s})=rs+\left[\frac{s}{3}\right],\quad \text{当 } r\geqslant 1 \text{ 时。}$$

$$\xi(K_{3r+2,3s+1})\begin{cases}\leqslant rs+\min\left(\left[\frac{r+s}{3}\right],\left[\frac{2s}{3}\right],\left[\frac{8r+16s+2}{39}\right]\right),\\ \geqslant rs+\max\left(\left[\frac{s+2}{3}\right],\ \min\left(\left[\frac{r}{3}\right],\ \left[\frac{2s}{3}\right]\right)\right),\\ \qquad\qquad \text{对 } r\geqslant 2,\ s\geqslant 7。\end{cases}\tag{11.19}$$

(这两个式子当 $r\geqslant 2s$ 时相等)。

$$\xi(K_{3r+2,3s+2})\begin{cases}\leqslant rs+\min\left(\left[\frac{r+2s}{3}\right],\left[\frac{2r+s}{3}\right],\left[\frac{16r+16s+4}{39}\right]\right),\\ \geqslant rs+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{s}{3}\right]+\left[\frac{r}{9}\right],\quad \text{对 } 1\leqslant r\leqslant s。\end{cases}$$

一个图 G 的叉数 $\nu(G)$ 是当将 G 画在平面上时相交的边对的最少数目。显然，$\nu(G)=0$ 当且仅当 G 是可平面的。叉数的精确值对于这三族图的任何一族都没有得到；仅仅是明确地建立了上

界。普遍的猜想是(11.20)和(11.21)中的界是精确的。有几个作者错误地认为他们已经证明了等式。详见郭伊[G12]。

定理 11.28　完全图的叉数满足不等式

$$\nu(K_p)\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{p}{2}\right]\left[\frac{p-1}{2}\right]\left[\frac{p-2}{2}\right]\left[\frac{p-3}{2}\right]。\qquad(11.20)$$

定理 11.29　完全双图的叉数满足不等式

$$\nu(K_{m,n})\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]。\qquad(11.21)$$

T. 萨蒂(Saaty)证明了(11.20)对于 $p\leqslant10$ 是一个等式，而 D. 克莱特曼(Kleitman)证明了(11.21)对于 $m\leqslant6$ 是一个等式。这些是 $\nu(K_p)$ 和 $\nu(K_{m,n})$ 中已经知道的仅有的几个值。对于方体甚至还没有人猜想过 ν 等于什么。

习题

11.1　若一个(p_1, q_1)图与一个(p_2, q_2)图同胚，则

$$p_1+q_2=p_2+q_1。$$

11.2　每一个平面的欧拉图含有一条不与自身交叉的欧拉迹。

11.3　一个 $p\geqslant6$ 的 3-连通图是可平面的当且仅当没有同胚于 $K_{3,3}$ 的子图。　(D. W. 霍尔(Hall)[H6])

***11.4**　每一个 4-连通可平面图是哈密顿的。　(托特[T6])

11.5　每一个 5-连通可平面图至少有 12 个点。构造一个这样的图。

11.6　没有 6-连通可平面图。

***11.7**　若 G 是一个最大平面图，其中每一个三角形是一个区域的界，则 G 是哈密顿的。　(惠特尼[W12])

11.8　并不是每一个最大可平面图是哈密顿的。

(惠特尼[W12])

11.9　若 G 画在平面上时每对不邻接的边交叉偶数次，则 G 是可平面的。　(R. L. 布鲁克斯(Brooks), C. A. B. 史密斯

(Smith), A. H. 斯通(Stone)和 W. T. 托特)

11.10　证明或否定：每一个连通的不可平面图以 K_5 或 $K_{3,3}$ 为一个收缩。

11.11　证明或否定：一个图是可平面的当且仅当度不小于 3 的点的数目至多为 6 的每个子图同胚于 K_2+P_4 的一个子图。

11.12　证明或否定：一个平面图的由它的各个内部面组成的圈基总是从一个树得来(参见第四章)。

***11.13**　每一个 3-连通可平面图有一个最大度等于 3 的生成树。　(巴尼特[B3])

11.14　一个平面图是 2-连通的当且仅当它的几何对偶是 2-连通的。

11.15　所有的轮形图是自对偶的。

11.16　一个连通图 G 的平方是外可平面的当且仅当 G 是 K_3 或一条道路。

11.17　下列陈述是等价的：

(1) 线图 $L(G)$ 是外可平面的。

(2) 最大度 $\Delta(G)\leqslant 3$ 且每一个度等于 3 的点是一个割点。

(3) 全图 $T(G)$ 是可平面的。

(夏特朗，盖勒和赫德尼米[CGH2]，贝扎特[B4])

11.18　一个图 G 的平方是可平面的当且仅当 $\Delta(G)\leqslant 3$，每一个度等于 3 的点是一个割点，且 G 的所有有 3 个以上的点的块是偶圈。　(哈拉里，卡普(Karp)和托特[HKT1])

11.19　一个图 G 的线图是可平面的当且仅当 G 是可平面的，$\Delta(G)\leqslant 4$，且每一个度等于 4 的点是一个割点。

(塞德拉捷克(Sedláček)[S10])

11.20　求彼得森图的亏格和叉数。

11.21　证明或否定：一个不可平面图 G 有 $\nu=1$ 当且仅当对某一条线 x，$G-x$ 是可平面的。

11.22　每一个可平面图的荫度至多等于 3。构造一个荫度等于 3 的可平面图。

11.23　每一个图同胚一个荫度等于 1 或 2 从而厚度也是 1 或 2 的图。

11.24　G 的偏斜度是为了得到可平面图需要移去的线的最少数目。求下列各图的偏斜度:

a) K_p,　b) $K_{m,n}$,　c) Q_n。　　(A. 科捷格)

11.25　若 G 是外可平面的且没有三角形,则

$$q \leqslant (3p-4)/2。$$

11.26　若 G 是一个图，使对于任何两个点至多有二条长度大于 1 的点不相交的道路联结它们,则

a) G 是可平面的。

b) $q \leqslant 2p-3$。

c) 若 G 是不可分的且 $p \geqslant 5$, 则有唯一的一个哈密顿圈。

(唐(Tang)[T2])

11.27　将方体 Q_4 嵌入圆环面。

11.28　任何一个围长为 g 的图 G 的亏格有下界

$$\gamma \geqslant \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2}{g}\right)q-(p-2)\right]。$$

(拜内克和哈拉里[BH2])

*11.29　$\gamma(K_{n,n,n}) = \binom{n-1}{2}$。　　(G. 林格尔)

11.30　若 G_1 和 G_2 是同胚的，则 $\xi(G_1)=\xi(G_2)$ 且 $\nu(G_1)=\nu(G_2)$。

11.31　$K_{m,n}$ 中线不相交的 $K_{3,3}$ 子图的最多数目是

$$\min\left(\left[\frac{m}{3}\left[\frac{n}{3}\right]\right], \left[\frac{n}{3}\left[\frac{m}{3}\right]\right]\right)。$$

于是对所有的 n,

$$\xi(K_{n,n}) \geqslant \left[\frac{n}{3}\left[\frac{n}{3}\right]\right]。$$

(拜内克和郭伊[BG1])

第十二章 可着色性

假如有一条棕色小牛和一条棕色大狗，一个艺术家要将它们画在一幅画上。……那必须将它们着上颜色，使你一眼就能把它们区分开，是不是呢？当然是的。好，那么你会不会要他去把它们都着上棕色呢？当然不会。他把其中一个动物着上蓝色，那你就不会搞错了。对于地图也完全一样，这就是为什么他们要给每一个国家着一种不同的颜色。

——塞缪尔·克莱门斯（马克·吐温）

四色猜想（4 Color Conjecture，简记为 4CC）真可以改名叫“四色病”了。因为它真象个传染病一样。它很容易传染。有时是良性的，有时却是恶性或慢性的。还没有发明一种预防针可对付这种病，但一个人的体格如果足够强壮，那末稍为一感染就可以有终身免疫力。它会反复发作，虽然还没有致死的记录，但已经知道它会使人痛苦非凡。这种病至少已经观察到一次它从父亲转移到了儿子，所以它也许是会遗传的。

就是这个问题促成了图的可着色性的一些结果，这些结果反过来又导致了对图论的另外一些领域的探讨。本章讲清了一个图的着色和色数以后，就为五色定理的证明和四色猜想的讨论作好了准备。然后我们引入唯一可着色图和临界图。唯一可着色图是只能以一种方式着色的图而临界图在着色这方面是极小的。在本章中还要探讨同态与着色之间的密切关系，最后以研究色多项式的性质作为结束。

1. 色数

图的一个着色是对它的每一个点指定一种颜色，使得没有两个邻接的点有同一种颜色。具有任何一种相同的颜色的所有的点的集是独立的，并且称为一个色组。图 G 的一个 n-着色是用 n 种颜色的一个着色；按照这种着色将 V 划分为 n 个色组。色数 $\chi(G)$ 定义为使得 G 有一个 n-着色的最小的数目 n。若 $\chi(G)\leqslant n$，图 G 称为 n-可着色的；若 $\chi(G)=n$，称为 n 色的。

因为 G 显然有一个 p-着色和一个 $\chi(G)$-着色，所以当 $\chi(G)<n<p$ 时它一定有一个 n-着色。图 12.1 中的图是 2 色的，对于 $n=2, 3, 4$ 的 n-着色都已经画出，其中用正整数来记颜色。

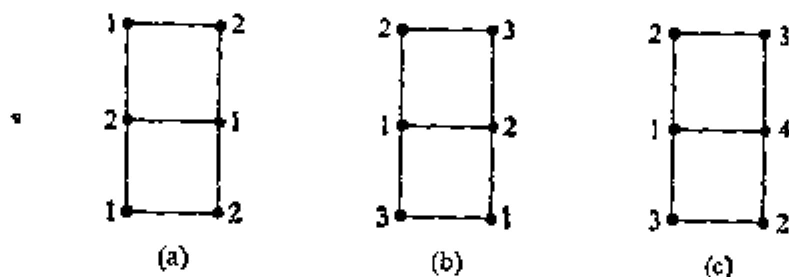


图 12.1 一个图的三种着色。

某些熟悉的图的色数比较容易决定，即 $\chi(K_p)=p$，$\chi(K_p-x)=p-1$，$\chi(\overline{K}_p)=1$，$\chi(K_{m,n})=2$，$\chi(C_{2n})=2$，$\chi(C_{2n+1})=3$，对于任何一个非平凡树 T，$\chi(T)=2$。

显然，一个图是 1 色的当且仅当它是全不连通的。科尼希 [K10, p. 170] 给出了可双色的(2-可着色)图的一个特征，这就是定理 2.4 中所说的。

定理 12.1 一个图是可双色的当且仅当它没有奇圈。

对 $n\geqslant 3$ 提供 n-可着色图的特征似乎还解决不了，因为甚至 $n=3$ 的这种判定准则也将有助于解决 4CC。还不知道用什么方便的办法来求一个图的色数，然而已经知道几个用其他不变量来表示的 $\chi(G)$ 的界。一个显然的下界是 G 的一个最大的完全子图中的点的数目。我们现在考虑上界。其中第一个属于杰克斯和威尔弗 [SW1]。

定理 12.2 对于任何一个图 G,

$$\chi(G)\leqslant 1+\max\delta(G'), \tag{12.1}$$

其中极大对 G 的所有导出子图 G' 取。

[证明] 这个结果对于全不连通图是显然的。令 G 是任意一个 n 色图, $n\geqslant 2$。令 H 为任何一个最小的导出子图, 使得 $\chi(H)=n$。于是图 H 对于它所有的点 v 有性质 $\chi(H-v)=n-1$。可得 $\deg v\geqslant n-1$, 所以 $\delta(H)\geqslant n-1$, 从而

$$n-1\leqslant\delta(H)\leqslant\max\delta(H')\leqslant\max\delta(G'),$$

其中, 第一个极大对 H 的所有导出子图 H' 取, 第二个极大对 G 的所有导出子图 G' 取。上式蕴含

$$\chi(G)=n\leqslant 1+\max\delta(G')。$$

系 12.2(a) 对于任何一个图 G, 色数至多比最大的度大 1, 即

$$\chi\leqslant 1+\Delta。 \tag{12.2}$$

然而,布鲁克斯[B16]证明了这个界常常还可以改进。

定理 12.3 若 $\Delta(G)=n$, 则 G 是 n-可着色的,除了

i) $n=2$ 而 G 有一个支是一个奇圈,或

ii) $n>2$ 而 K_{n+1} 是 G 的一个支。

写在贝尔热 [B12, p. 37] 和奥尔 [O5, p. 225] 中的一个下界和哈拉里和赫德尼米 [HH1] 的一个上界中包含有 G 的点独立数 β_0。

定理 12.4 对于任何一个图 G,

$$p/\beta_0\leqslant\chi\leqslant p-\beta_0+1。 \tag{12.3}$$

[证明] 若 $\chi(G)=n$, 则 V 可以划分成 n 个色组 V_1, V_2, …, V_n。其中每一个色组如上面所说是点的一个独立集。若 $|V_i|=p_i$, 则每一个 $p_i\leqslant\beta_0$, 所以 $p=\sum p_i\leqslant n\beta_0$。

要验证上界, 令 S 为含有 β_0 个点的最大的独立集。显然, $\chi(G-S)\geqslant\chi(G)-1$。因为 $G-S$ 有 $p-\beta_0$ 个点, $\chi(G-S)\leqslant p-\beta_0$。所以 $\chi(G)\leqslant\chi(G-S)+1\leqslant p-\beta_0+1$。

这里提出的界没有一个是特别好的。也就是说, 对于任何一

个界及每一个正整数 n，存在一个图 G，使 $\chi(G)$ 与界的差大于 n。

讨论到现在，有的人也许就会认为色数很大的所有的图都有很大的团，从而含有三角形。事实上，迪拉克 [D7] 问：是否存在一个图，它没有三角形但有任意大的色数？这个问题由勃兰克·德斯卡兹*(Blanche Descartes) [D3]，米歇尔斯基 (Mycielski) [M19] 和季可夫[Z1]独立地作了肯定的回答。他们的结果为 J. B. 凯利和 L. M. 凯利 [KK1] 所推广，他们证明了，对所有的 $n\geqslant 2$，有一个围长超过 5 的 n 色图。同一篇论文中，他们猜想下列定理，它首先为厄尔多斯 [E2] 用概率的方法证明，以后，由洛瓦斯 [L5] 构造地证明了。

定理 12.5 对每两个正整数 m 和 n，存在一个围长超过 m 的 n 色图。

数 $\bar{\chi}=\bar{\chi}(G)=\chi(\bar{G})$ 是划分 G 的点集得到的子集的最少数目，而使得每一个子集导出 G 的一个完全子图。显然，$\bar{\chi}(G)\geqslant\beta_0(G)$。对于一个图和它的补图的色数的和与积的界由诺德豪斯和加德姆 (Gaddum) [NG1] 得到。

定理 12.6 对于任何一个图 G，χ 和 $\bar{\chi}$ 的和与积满足不等式

$$2\sqrt{p}\leqslant\chi+\bar{\chi}\leqslant p+1, \tag{12.4}$$

$$p\leqslant\chi\bar{\chi}\leqslant\left(\frac{p+1}{2}\right)^2。 \tag{12.5}$$

[证明] 令 G 是 n 色的，且令 V_1, V_2, …, V_n 为 G 的色组，其中 $|V_i|=p_i$。则当然有 $\sum p_i=p$ 和 $\max p_i\geqslant p/n$。因为每个 V_i 导出 $\bar{G}$ 的一个完全子图，$\bar{\chi}\geqslant\max p_i\geqslant p/n$，所以 $\chi\bar{\chi}\geqslant p$。因为两个正数的几何平均值不超过它们的算术平均值，可得 $\chi+\bar{\chi}\geqslant 2\sqrt{p}$。这就建立了两个下界。

为证明 $\chi+\bar{\chi}\leqslant p+1$，我们对 p 用归纳法。注意当 $p=1$ 时等式成立。于是我们假定对所有有 $p-1$ 个点的图 G，$\chi(G)+\bar{\chi}(G)\leqslant p$。令 H 和 $\bar{H}$ 为有 p 个点的两个互补的图，又令 v 为 H 的一

* 这位所谓"女士"实际上是 {布鲁克斯，史密斯，斯通，托特} 的一个非空子集；这次是{托特}。

个点，则 $G=H-v$ 和 $\overline{G}=\overline{H}-v$ 是有 $p-1$ 个点的两个互补的图。令 v 在 H 中的度为 d，所以 v 在 $\overline{H}$ 中的度是 $p-d-1$。显然有

$$\chi(H)\leqslant\chi(G)+1 \text{ 和 } \bar{\chi}(H)\leqslant\bar{\chi}(G)+1。$$

若

$$\chi(H)<\chi(G)+1 \text{ 或 } \bar{\chi}(H)<\bar{\chi}(G)+1,$$

则 $\chi(H)+\bar{\chi}(H)\leqslant p+1$。于是假定 $\chi(H)=\chi(G)+1$ 和 $\bar{\chi}(H)=\bar{\chi}(G)+1$。这就蕴含由 H 中移去 v 要减少色数，但移去 v 就得到了 G，所以 $d\geqslant\chi(G)-1$。类似地，

$$p-d-1\geqslant\bar{\chi}(G)-1;$$

于是 $\chi(G)+\bar{\chi}(G)\leqslant p+1$。所以我们总是有

$$\chi(H)+\bar{\chi}(H)\leqslant p+1。$$

最后，应用不等式 $4\chi\bar{\chi}\leqslant(\chi+\bar{\chi})^2$，可见

$$\chi\bar{\chi}\leqslant[(p+1)/2]^2。$$

2. 五色定理

虽然还不知道是不是所有的可平面图是 4-可着色的，但是，它们肯定是 5-可着色的。这一节中，我们将提出这个属于希伍德 [H38] 的有名的结果的一个证明。

定理 12.7　每一个可平面图是 5-可着色的。

[证明]　我们对点的数目 p 进行归纳。对于任何一个有 $p\leqslant 5$ 个点的可平面图，这个结果可以平凡地得到，因为图是 p-可着色的。

作为归纳法的假设，我们假定所有有 p 个点的可平面图，$p\geqslant 5$，是 5-可着色的。令 G 是一个有 $p+1$ 个顶点的平面图。按系 11.1(e)，G 含有一个度等于 5 或小于 5 的顶点。由假设，平面图 $G-v$ 是 5-可着色的。

考虑用一种办法指定 $G-v$ 的顶点的颜色，使产生一个 5-着色。其中，颜色用 c_i 来记，$1\leqslant i\leqslant 5$。若某种颜色，例如 c_j，确实没有用于邻接于 v 的顶点的着色，则将 v 指定为 c_j 就产生 G 的一个 5-着色。

留下来要考虑的情形仅仅是 $\deg v=5$，而且五种颜色都用来给与 v 邻接的顶点着色。必要时置换颜色的编号，使以 c_1, c_2, c_3, c_4 和 c_5 着色的顶点依次环绕 v 排列。现在将与 v 邻接的顶点中用颜色 c_i 着色的顶点标以 v_i, $1\leqslant i\leqslant 5$(见图 12.2)。

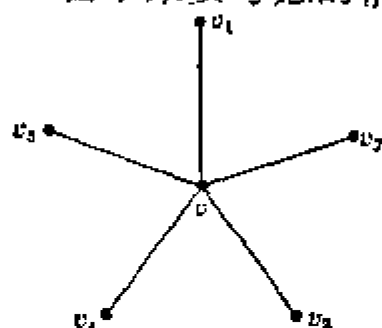


图 12.2　五色定理证明中的一步。

令 G_{13} 记 $G-v$ 的一个子图，它由用 c_1 或 c_3 着色的顶点导出。若 v_1 和 v_3 属于 G_{13} 的不同的支，则在 G_{13} 的含 v_1 的支中交换用 c_1 着色的顶点与用 c_3 着色的顶点的颜色导出 $G-v$ 的另外一个 5–着色。但是，在这个 5–着色中邻接于 v 的顶点没有一个用 c_1 着色，所以用 c_1 将 v 着色得到 G 的一个 5–着色。

另一方面，若 v_1 和 v_3 属于 G_{13} 的同一个支，则在 G 中存在一条 v_1 与 v_3 之间的道路，它的所有的顶点都用 c_1 或 c_3 着色。这条道路与道路 v_1vv_3 一起构成一个圈。它一定将 v_2 圈在它里面，或者同时将 v_4 和 v_5 圈在它里面。在任何一种情形下，不存在联结 v_2 和 v_4 并且全部顶点用 c_2 或 c_4 着色的道路。从而，如果我们令 G_{24} 记 $G-v$ 的由用 c_2 或 c_4 着色的顶点导出的子图，则 v_2 和 v_4 属于 G_{24} 的不同的支。于是，在 G_{24} 的含有 v_2 的支中交换用 c_2 着色的顶点与用 c_4 着色的顶点的颜色，导出 $G-v$ 的又一个 5–着色，其中没有一个与 v 邻接的顶点用 c_2 着色。于是我们可以将 v 指定为颜色 c_2 而得到 G 的一个 5–着色。

3、四色猜想*

在第一章中我们提到过，因为试图解决 4CC，从而使这个问题在图论中起了催化剂的作用。我们现在对这个声名不太好的问题按图论的方式来进行讨论。平面地图 G 的一个着色是对 G 的每一个区域指定一种颜色，使得没有两个邻接的区域被指定为同一种颜色。若地图 G 有一种用 n 种或更少的颜色的着色就称 G 是

* 见第一章中的译注 (p.5)。——译注

n-可着色的。这个猜想的原始形式就是在第一章中所提及的，即每一个平面地图是 4-可着色的。

四色猜想(4CC)　每一个可平面图是 4-可着色的。

我们强调指出，一个图的着色总是指它的顶点的着色，而一个地图的着色指的是它的区域的着色！于是，猜想每一个平面地图是 4-可着色的事实上等价于四色猜想的这种说法。为了证明这一点，假定 4CC 成立，而令 G 为任何一个平面地图。令 G^* 为 G 的几何对偶的基本图。因为 G 的两个区域是邻接的当且仅当 G^* 的对应顶点是邻接的，所以由图 G^* 是 4-可着色的就得到 G 是 4-可着色的。

反之，假定每一个平面地图是 4-可着色的，而令 H 为任何一个可平面图。不失一般性，我们假定 H 是一个连通的平面图。令 H^* 是 H 的对偶，并且将 H^* 画成它的每一个区域正好圈入一个 H 的顶点。在 H^* 的每一个环中插进二个顶点，且在一个多重边的集合中对每一条边加入一个新顶点；这样，连通的平面伪图 H^* 就变成了一个平面图 H'. H' 的 4-可着色性现在蕴含 H 是 4-可着色的。这就完成了等价性的证明。

如果 4CC 一旦证明了的话，这个结果就是最好可能的，因为容易给出 4 色可平面图的例子，例如 K_4 和 W_6(见图 12.3)

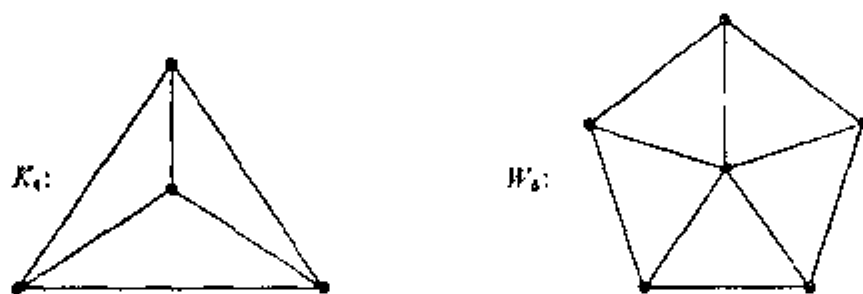


图 12.3　两个 4 色可平面图。

图 K_4 和 W_6 都有 3 个以上的三角形。按格伦鲍姆[G9]的一个定理，这是必要的。

定理 12.8　每一个只有 4 个以下三角形的可平面图是 3-可着色的。

由此立即可以得到下列的系；它原来由格洛基(Grötzsch)[G8]所证明。

系 12.8(a) 每一个没有三角形的可平面图是 3-可着色的。

任何一个需要 5 种颜色着色的平面地图一定含有大量的区域，因为奥尔和斯坦普尔 [OS1] 证明了所有直到有 39 个区域的平面地图都是 4-可着色的。这个结果比同类型的较早的结果增加了 4 个区域*。所有的证据都表明四色猜想是对的。我们现在就要看到，尝试用平面地图的形式来证明 4CC 可以限于平面地图的一个特殊族。

定理 12.9 四色猜想成立当且仅当每一个三次的无桥的平面地图是 4-可着色的。

[证明] 我们已经说过，每一个平面地图是 4-可着色的当且仅当 4CC 成立。这也等价于说：每一个无桥的平面地图是 4-可着色的，因为等同一条桥的两个端顶点的初等收缩不影响地图中区域的数目，也不影响任何两个区域的邻接性。

若每一个无桥的平面地图是 4-可着色的，则当然每一个三次的无桥的平面地图是 4-可着色的。为了验证它的逆命题，令 G 是一个无桥的平面地图，且假定所有三次的无桥的平面地图是 4-可着色的。因为 G 是无桥的，所以它没有端顶点。若 G 含有一个度为 2 的顶点 v，它关联于边 y 和 z。我们细分 y 和 z，分别记细分的顶点为 u 和 w。我们现在移去 v，将 u 与图 K_4-x 的一个度等于 2 的顶点等同，将 w 与 K_4-x 的另一个度等于 2 的顶点等同。注意每一个新加入的顶点的度等于 3 (见图 12.4)。若 G 含有一个顶点 v_0，它的度 $n\geq 4$，它关联于边 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们依次环绕于 v_0。我们细分每一条 x_i 产生一个新顶点 v_i。然后，我们移去 v_0，且加入新的边 $v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$。这样加入的每一个顶点的度也等于 3。

用 G' 记得到的无桥的三次平面地图，它由假定是 4-可着色

* 芬克(Finck)和萨克斯[FS1]证明，每一个至多有 21 个三角形的平面图是 4-可着色的。

的。如果对 G 的每一个度 $\deg v\neq 3$ 的顶点 v，我们等同所有在构成 G' 时对 v 新加入的顶点，我们就重新得到 G。于是，令 G' 有一个给定的 4 着色，上述从 G' 到 G 的收缩导出 G 的一个 m 着色，$m\leqslant 4$。证毕。

另一个有趣的等价命题是惠特尼 [W16] 证明的。

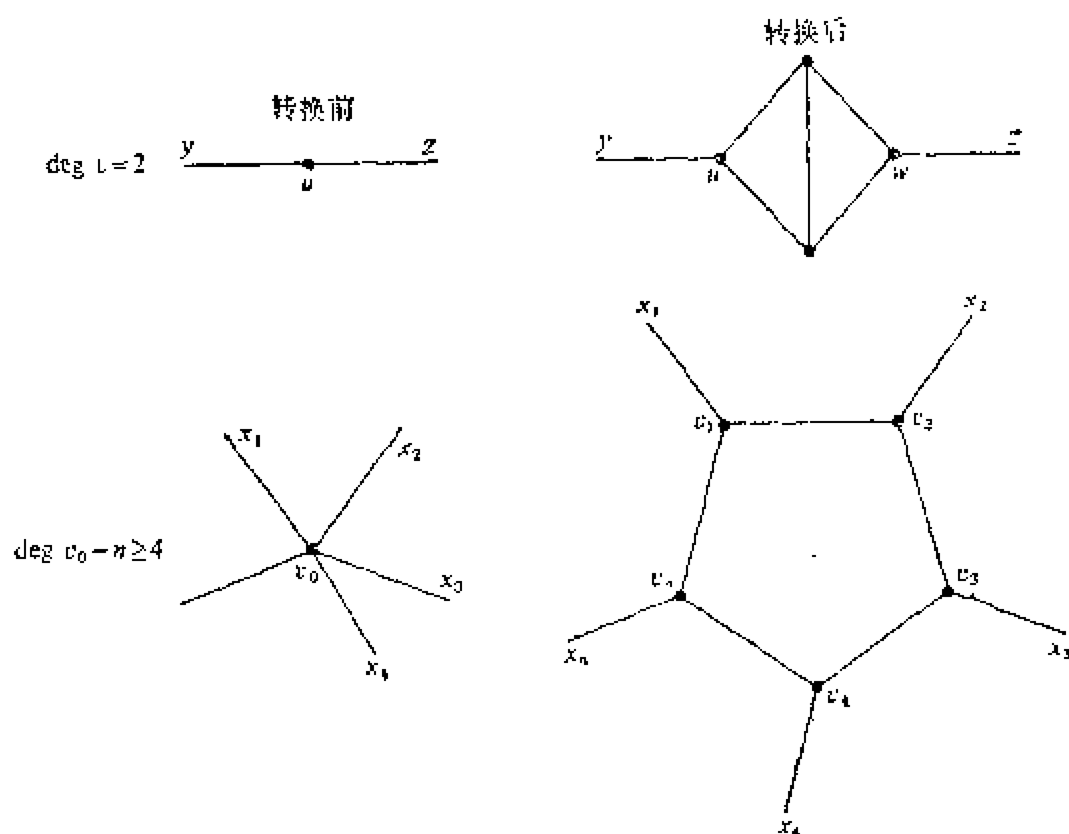


图 12.4　将一个图转换为一个三次图。

定理 12.10　四色猜想成立当且仅当每一个哈密顿可平面图是 4-可着色的。

四色猜想有对区域着色的等价命题，同样，它也有一个对线着色的等价命题。

图 G 的一个线着色是对它的每一条线指定一种颜色，使得没有两条邻接的线被指定为相同的颜色。G 的一个 n-线着色是用正好 n 种颜色的 G 的一个线着色。线色数* $\chi'(G)$ 是使得 G 有一个 n-线着色的最小的数目 n。立即得到，对于任何一个非全不连通的图 G，$\chi'(G)=\chi(L(G))$。对于线色数的两个精密的界由维津

* 有时称为色指标(chromatic index)。

[V4]得到*。

定理 12.11　对于任何一个图 G，线色数满足不等式：

$$\Delta\leqslant\chi'\leqslant\Delta+1。\qquad(12.6)$$

在图 12.5 中说明了 $\chi'(G)$ 的两个可能值。一般地还不知道对于怎样的图有 $\chi'=\Delta$。

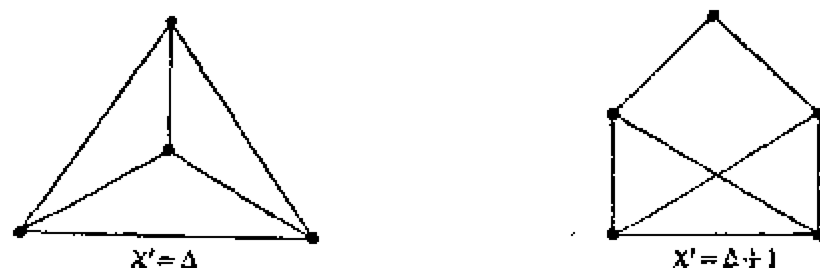


图 **12.5**　线色数的两个值。

定理 12.12　四色猜想为真当且仅当对于每一个无桥的三次可平面图 G，$\chi'(G)=3$。

[证明]　我们已经在定理 12.9 中证明，4CC 等价于说：每一个三次的无桥的平面地图是 4-可着色的。我们现在证明，一个三次的无桥的平面地图 G 是 4-可着色的当且仅当 $\chi'(G)=3$。

首先，我们假定 G 是一个无桥的三次平面地图，它是 4-可着色的。不失一般性，我们取 G 是连通的。于是按假设，它是一个 4-可着色的平面地图。我们选克莱茵四群 F** 的元素为色集，F 中的加法定义为 $k_i+k_i=k_0$ 和 $k_1+k_2=k_3$，而 k_0 是单位元素。

令有地图 G 的一个给定的 4-着色。我们规定一条边的颜色等于关联于这条边的两个不同的区域的颜色的和。现在立即可以得到，边都用 $\{k_1, k_2, k_3\}$ 的元素着色，而且没有两条邻接的边指定为相同的颜色；于是 $\chi'(G)=3$。

* 一个英语的证明可见奥尔 [O7, p. 248]。

** 克莱茵四群是以 $\{k_0, k_1, k_2, k_3\}$ 为元素的交换群，它的加法表如下：

+	k_0	k_1	k_2	k_3
k_0	k_0	k_1	k_2	k_3
k_1	k_1	k_0	k_3	k_2
k_2	k_2	k_3	k_3	k_1
k_3	k_3	k_2	k_1	k_0

——译注

反之，令 G 是一个无桥的三次平面图，$\chi'(G)=3$。用 F 的三个非零元素给边着色。选某个区域为 R_0，且指定它的颜色为 k_0。对于 G 的任何一个其余的区域 R，我们按下面的办法给它指定一种颜色。令 C 为平面上联结 R_0 的内部和 R 的内部且不通过 G 的任何一个顶点*的任意一条曲线。于是我们规定 R 的颜色为与 C 相交的边的颜色的和。

这样规定区域的颜色是合理的，因为与任何不通过 G 的顶点的简单闭曲线相交的边的颜色的和是 k_0。令 S 是这样的一条曲线，又令 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是与 S 相交的边的颜色。此外，令 $d_1, d_2, \cdots, d_m$ 是在 S 内部的边的颜色。注意若用 $c(v)$ 记 3 条关联于一个顶点 v 的边的颜色的和，则 $c(v)=k_0$。从而，对所有在 S 的内部的顶点 v，$\sum c(v)=k_0$。另一方面，因为 F 的每一个元素是自逆的，我们也有，

$$\sum c(v)=c_1+c_2+\cdots+c_n+2(d_1+d_2+\cdots+d_m)$$
$$=c_1+c_2+\cdots+c_n\text{。}$$

于是 $c_1+c_2+\cdots+c_n=k_0$。现在，可以按通常的办法证明这样就构成 G 的各个区域的一个 4-着色。证毕。

因为由一个 n 度正则的图 G 的一个 n-线着色得到的每一个线色组是一个 1-因子，上述结果导出四色猜想的另外一个等价命题。

系 12.12(a) 四色猜想成立当且仅当每一个无桥的三次可平面图是 1-可因子分解的。

定理 12.12 已经被用因子分解的说法予以推广(见奥尔 [O7, p.103]。

定理 12.13 一个连通的平面**地图 G 4-可着色的一个必要且充分条件是：G 是三个子图 G_1, G_2, G_3 之和，使得对每一个点 v，每一个 G_i 中关联于 v 的线的数目都是偶数或都是奇数。

虽然 4CC 已经为许多人知道，但是另外还有几个关于着色的

---

* 原书为"点(point)"，不妥。——译注

** 原书为"可平面的(planar)"，不妥。——译注

猜想。其中最有意思的一个与收缩有关，它属于哈德维格尔（Hadwiger）[H1]。

哈德维格尔猜想　每一个连通的 n 色图可以收缩到 K_n。

并不奇怪，这个猜想与 4CC 有关。已经知道，哈德维格尔猜想对于 $n \leqslant 4$ 成立，这是迪拉克[D5]的一个结果。对于 $n=5$，这个猜想说：每一个 5 色图可以收缩到 K_5。由定理 11.14，每一个这种图 G 一定是不可平面的。于是，哈德维格尔猜想在 $n=5$ 时蕴含 4CC。它的逆命题由瓦格纳[W3]所建立。

定理 12.14　哈德维格尔猜想在 $n=5$ 时等价于四色猜想。

4. 希伍德地图着色定理

令 S_n 是亏格等于 n 的可定向曲面，于是 S_n 拓扑等价于一个有 n 个环柄的球面。S_n 的色数，记作 $\chi(S_n)$，是可以嵌入 S_n 的所有图的色数中最大的一个。曲面 S_0 就是球面，求 $\chi(S_0)$ 的问题我们已经遇到过几次。四色猜想说：$\chi(S_0)=4$，而我们当然只知道（由定理 12.7）$\chi(S_0)$ 是 4 或 5。

对于圆环面，希伍德[H38]可以证明 $\chi(S_1)=7$。不等式 $\chi(S_1) \geqslant 7$ 如下得到：可以将 K_7 嵌入圆环面，这已经画在图 11.17 中了。等式 $\chi(S_1)=7$ 是这样得到的：希伍德还可以证明（见下面定理 12.15 的证明），亏格 n 为正数的可定向的曲面的色数有一个上界

$$\chi(S_n) \leqslant \left[\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right], \quad (n>0)。 \qquad (12.7)$$

对于 $n=1$，我们有 $\chi(S_1) \leqslant 7$，所以 $\chi(S_1)=7$。

希伍德曾经发现了肯普对四色猜想的"证明"中的错误，但是他自己也并不是不犯错误的。他相信他已经证明了他的公式中的等号。但是仅仅过了一年，赫夫特（Heffter）[H40]就指出了希伍德的论证中疏忽的几个错误，所以只能得到不等式（12.7）。赫夫特证明了，对于 $0<n\leqslant 6$，等式确实成立。逐渐，在希伍德公式中等式成立这件事成为希伍特地图着色猜想。我们现在证明，当林格尔和杨斯证明了 $\gamma(K_p)=\{(p-3)(p-4)/12\}$，即证明了定理

11.18 以后，他们就解决了这个猜想。

定理 12.15（希伍德地图着色定理）　对于每一个正整数 n，亏格等于 n 的可定向曲面的色数由下式给出：

$$\chi(S_n)=\left[\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right],\quad (n>0)。\qquad (12.8)$$

［证明］　我们先证不等式 (12.7)。令 G 是一个被嵌入 S_n 的 $(p,\ q)$ 图。我们可以假定 G 是一个三角剖分，因为任何一个图可以加入一些边而扩张为有相同的亏格的一个三角剖分而不减少 χ。若 $\bar{d}$ 是 G 的顶点的度的平均值，则 p, q 和 r（区域的数目）由下列方程相联系，

$$\bar{d}p=2q=3r。\qquad (12.9)$$

解出 q 和 r，用 p 来表示，且利用欧拉方程(11.4)，我们得到，

$$\bar{d}=12(n-1)/p+6。\qquad (12.10)$$

因为 $\bar{d}\leqslant p-1$，这就给出不等式

$$p-1\geqslant 12(n-1)/p+6。\qquad (12.11)$$

解出 p，取正根，我们得到

$$p\geqslant\left[\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right]。\qquad (12.12)$$

令 $H(n)$ 为(12.8)的右边。我们必须证明用 $H(n)$ 种颜色来着色 G 的顶点*是足够了。显然，若 $p=H(n)$，我们就有足够多的颜色。否则，若 $p>H(n)$，我们以 $H(n)$ 代 (12.10) 中的 p，得到不等式

$$\bar{d}<12(n-1)/H(n)+6=H(n)-1。\qquad (12.13)$$

为了得到后面的等式只要进行通常的代数变换。于是，当 $p>H(n)$ 时，有一个顶点 v 它的度至多等于 $H(n)-2$。(用一个初等收缩) 等同 v 和它的任何一个邻接的顶点得到一个新图 G'。若 $p'=p-1=H(n)$，则 G' 可以用 $H(n)$ 种颜色着色。若 $p'>H(n)$，重复上面的论证，最后总会得到一个 $H(n)$-可着色图。于是容易看出，这个图的一个 $H(n)$-着色导出前一个图一个用 $H(n)$ 种颜色的着

* 原书为"点(point)"，不妥。——译注

色。以此类推，所以 G 本身是 $H(n)$-可着色的。

定理的另外一半，其证明是困难的。但是林格尔和杨斯已经提供了工具。若完全图 K_p 可以嵌入 S_n，则由方程(11.9)，

$$n \geqslant \gamma(K_p) = \left\{\frac{(p-3)(p-4)}{12}\right\}。\qquad (12.14)$$

置 p 为满足方程(12.14)的最大整数，我们有

$$\frac{(p-3)(p-4)}{12} \leqslant \left\{\frac{(p-3)(p-4)}{12}\right\} \leqslant n$$

$$\leqslant \left\{\frac{(p-2)(p-3)}{12}\right\} - 1 < \frac{(p-2)(p-3)}{12}。$$

解出 p，我们得到，

$$\frac{5+\sqrt{1+48n}}{2} \leqslant p \leqslant \frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}。$$

所以

$$p = \left[\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right]。\qquad (12.15)$$

因为 $\chi(K_p) = p$，我们已经找到一个图亏格等于 n 而色数等于 $H(n)$。这就证明了 $H(n)$ 是 $\chi(S_n)$ 的下界。证毕。注：(12.8)式在 $n=0$ 时的特殊情形就是 4CC。

5. 唯一可着色图

令 G 是一个标定图。G 的任何一个 $\chi(G)$-着色导出一个分 G 的点集为 $\chi(G)$ 个色组的划分。若 $\chi(G)=n$ 且 G 的每一个 n-着色导出的 V 的划分都相同，则称 G 是唯一 n-可着色的或简称唯一可着色的。图 12.6 中的图 G 是唯一 3-可着色的，因为 G 的每一个 3-着色都导出划分 $\{u_1\}$，$\{u_2, u_4\}$，$\{u_3, u_5\}$。而五边形不是唯一 3 可着色的；事实上，它的点集可能有 5 种不同的划分。

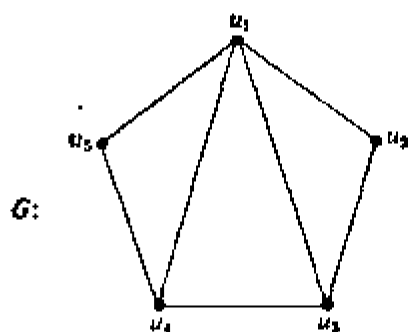


图 **12.6**　一个唯一可着色图。

我们从关于唯一可着色图的几个初等结果谈起。首先，在一个唯一 n 着色图 G 的任何一个 n-着色中，对于 G 的每一个点 v，对于与指定于 v 的颜色不同的每一种颜色，v 至少与一个有这种颜色的点邻接；因为否则，改变 v 的颜色就可以得到 G 的另外一种不同的 n-着色。这就蕴含 $\delta(G)\geqslant n-1$。一个图唯一可着色的一个必要条件由卡特赖特和哈拉里[CH2]所发现。

定理 12.16 在一个唯一 n-可着色图的 n-着色中，由任何两个色组的并导出的子图是连通的。

[证明] 考虑一个唯一 n-可着色图 G 的一个 n-着色，且假定存在 G 的两个色组，例如 C_1 和 C_2，使得 G 的由 $C_1\cup C_2$ 导出的子图 S 是不连通的。令 S_1 和 S_2 是 S 的两个支。由前面的注记，S_1 和 S_2 一定都同时含有 C_1 和 C_2 的点。现在只要将 $C_1\cap S_1$ 中点的颜色与 $C_2\cap S_1$ 中点的颜色互换，就可以得到与给定的 n-着色不同的一个 n-着色。这就蕴含 G 不是唯一可着色的。这是一个矛盾。

然而，定理 12.16 的逆定理不成立。这可以从图 12.7 中的三色图 G 看出。这个图有这样的性质：在它的任何一个 3-着色中，由任何两个色组的并导出的子图是连通的，但 G 并不是唯一 3-可着色的。

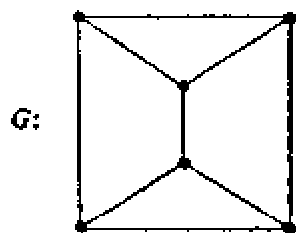


图 12.7 定理 12.16 的逆定理的一个反例。

由定理 12.16 可以得到，对 $n\geqslant 2$，任何一个唯一 n-可着色图是连通的。然而，还可以给出一个更强的结果，它属于夏特朗和盖勒 [CG1]。

定理 12.17 每一个唯一 n-可着色图是 $(n-1)$-连通的。

[证明] 令有一个唯一 n-可着色图 G 的一个给定的 n-着色。若 G 是完全的，它一定是 K_n，所以是 $(n-1)$-连通的。假定 G 既不是完全的又不是 $(n-1)$-连通的，就存在一个有 $n-2$ 个点的集 U，移去它以后使 G 不连通。于是，至少有二种颜色，例如 c_1 和 c_2，不指定于 U 的任何一个点。由定理 12.16，一个以 c_1 着色的点可以经由一条道路连通于任何一个以 c_2 着色的点，而且这条道路的

各点都以 c_1 或 c_2 着色。从而，G 的以 c_1 或 c_2 着色的点在 $G-U$ 的同一个支，例如 G_1 中。于是，将 $G-U$ 的不在 G_1 中的任何一个点改用 c_1 或 c_2 着色就可以得到 G 的另外一种 n-着色。这与 G 是唯一 n-可着色的假设矛盾，于是 G 是 $(n-1)$-连通的。

因为一个唯一 n-可着色图的任何 k 个色组的并，$2\leqslant k\leqslant n$，导出一个唯一 k-可着色图，这样我们得到下列推论。

系 12.17(a) 在一个唯一 n-可着色图的任何一个 n-着色中，由任何 k 个色组的并，$2\leqslant k\leqslant n$，导出的子图是 $(k-1)$-连通的。

容易给出一个不含三角形的 3 色图的例；事实上，我们在定理 12.5 中已经看到，对于任何 n 存在没有三角形的 n 色图，从而它没有同构于 K_n 的子图。这方面的一个更强的结果由哈拉里，赫德尼米和鲁宾逊(Robinson)[HHR1]得到。

定理 12.18 对于所有 $n\geqslant 3$，有一个唯一 n-可着色图，它不含有同构于 K_n 的子图*。

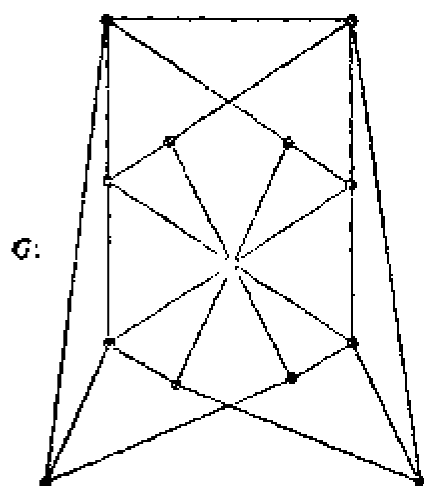


图 12.8 一个没有三角形的唯一 3-可着色图。

自然，一个图是唯一 1-可着色的当且仅当它是 1-可着色的，即全不连通的。我们也都知道，一个图 G 是唯一 2-可着色的当且仅当 G 是 2-色的和连通的。可以猜到，对于 $n\geqslant 3$，关于唯一 n-可着色图的知识是非常缺乏的。然而，在图的可平面的情形下，还有一些可说的。由于五色定理，我们只要考虑值 $3\leqslant n\leqslant 5$。这个领域内的结果属于夏特朗和盖勒 [CG1]。

定理 12.19 令 G 为一个 3-色平面图。若 G 含有一个三角形 T，使得对于 G 的每一个顶点 v 有一个三角形的序列 T，T_1，T_2，…，T_m，使得序列中相继的三角形有一条公共边，而 v 在 T_m 中，则 G 是唯一 3-可着色的。

现在立即可以得到下列结果。

---

* 图 12.8 不对，需加两条线补齐中间的八边形才是。——译注

系 12.19(a)　若一个 2-连通 3 色平面图 G 有至多一个区域不是三角形，则 G 是唯一 3-可着色的。

系 12.19(a)的逆命题不成立，因为一个唯一 3-可着色的平面图*可能有一个以上的区域不是三角形；见图 12.9。然而，每一个唯一 3-可着色的可平面图一定含有三角形。

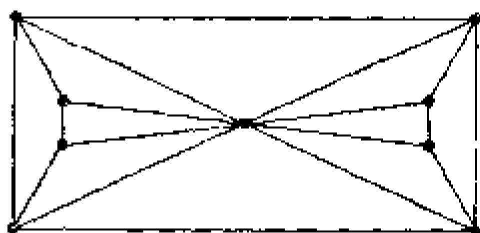


图 12.9　一个唯一 3-可着色可平面图。

定理 12.20　若 G 是一个至少有 4 个点的唯一 3-可着色可平面图，则 G 至少含有二个三角形。

对于唯一 4-可着色的可平面图，情形特别简单。

定理 12.21　每一个唯一 4-可着色可平面图是最大可平面图。

[证明]　令有一个唯一 4-可着色可平面图 G 的一个给定的 4-着色，它的色组记作 V_i，$1 \leqslant i \leqslant 4$，其中 $|V_i| = p_i$。因为当 $i \neq j$ 时，由 $V_i \cup V_j$ 导出的子图是连通的，G 一定至少有 $\sum(p_i+p_j-1)$ 条线，$1 \leqslant i < j \leqslant 4$。然而，这个和显然等于 $3p-6$。从而 $q \geqslant 3p-6$，所以由系 11.1(b) 得到，G 是最大可平面图。

虽然是否存在一个 5-可着色的可平面图还不知道，在 [CG1] 中给出的属于赫德尼米的一个结果解决了唯一 5-可着色性的问题；它的证明和上一个定理的证明类似。

定理 12.22　没有唯一 5-可着色的可平面图。

6. 临界图

若四色猜想不成立，则一定存在一个最小的 5 色可平面图。这样的一个图 G 有下列性质：对每一个点 v，子图 $G-v$ 是 4 色的。于是我们有一种自然的途径用反证法的形式去得到 4CC 的一个

* 原书为"可平面图 (planar graph)"，不妥。——译注

可能的证明。这就提出了一个基本问题，即探讨具有下列性质的5色图，或更一般地，n色图：对于G的每一个点v，$\chi(G-v)=n-1$。

按照迪拉克[D5]，一个图G称为是临界的*，若对所有的点v，$\chi(G-v)<\chi(G)$；若$\chi(G)=n$，则G是n-临界的。当然，若G是临界的，则对每一点v，$\chi(G-v)=\chi(G)-1$。

显然，没有一个图是1-临界的。唯一的2-临界图是K_2，而3-临界图只有奇圈。对于$n\geqslant 4$，n-临界图的特征还没有给出。

通常，决定一个图是否是临界的是很困难的；然而，每一个n色图，$n\geqslant 2$，含有一个n-临界子图。事实上，若H是G的任何一个最小的使$\chi(H)=\chi(G)$的导出子图，则H是临界的。

显然，每一个临界图G是连通的；而且，因为对于G的所有的块B，$\chi(G)=\max\chi(B)$，就得到G一定是一个块。这个性质只是临界图具有的几个性质之一。

下一个陈述已经在定理12.2的证明中提到过了。

定理 12.23　若G是一个n-临界图，则$\delta(G)\geqslant n-1$。

我们现在提出一个关于移去点的结果。

定理 12.24　没有一个临界图可以被一个完全子图所分离。

系 12.24(a)　一个临界图的每一个点割集含有两个不邻接的点。

每一个完全图是临界的；事实上，对于$U\subset V(K_p)$，$\chi(K_p-U)=p-|U|$。然而，对任何别的临界图，总是可能移去不止一个点而不使色数减少1以上；事实上，若S是一个n-临界图的任何一个独立点集，则$\chi(G-S)=n-1$。这个结果更蕴含：若u和v是一个不完全的n-临界图G的任何两个不邻接的点，就存在G的一个使u和v在同一个色组的n-着色和G的一个使u和v在不同的色组的n-着色。

关于临界图的有一个研究领域是有关圈的长度，特别是周长和围长。按定理12.23和系7.3(b)，若G是有p个点的一个n-临

---

* 如果还提到别种临界图，这一种将称为是色临界的。

界图，使 $p \leqslant 2n-1$，则 G 是哈密顿的。更一般地，迪拉克 [D6] 证明了下列结果。

定理 12.25　若 G 是一个 n-临界图，$n \geqslant 3$，则或者 G 是哈密顿的，或者 G 的周长至少为 $2n-2$。

迪拉克 [D6] 曾经猜想，每一个 4-临界图是哈密顿的。然而 J. B. 凯利和 L. M. 凯利 [KK1] 证明这个猜想不成立。迪拉克也猜想，对于所有的 m 和 n，$n \geqslant 3$，存在一个充分大的值 p，使得至少有 p 个点的所有 n-临界图的周长超过 m。J. B. 凯利和 L. M. 凯利证明这个猜想是对的。下述命题是定理 12.5 的一个推论：对于所有 m 和 n，存在一个 n-临界图，它的围长超过 m。

一个临界图 G 可能有附加的性质，即对 G 的任何一条线 x，$\chi(G-x)=\chi(G)-1$；此时，G 称为是线临界的。又若 $\chi(G)=n$，G 是 n-线临界的。虽然每一个线临界图是临界的，但它的逆命题不成立。例如，图 12.10 中的图 G 是 4-临界的，但它不是线临界的，因为 $\chi(G-x)=4$。

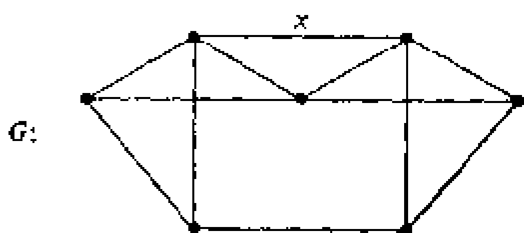


图 12.10　一个不线临界的临界图。

于是，对临界图的每一个性质，线临界图也都具有；在有些情形下后者有更多的性质。

定理 12.26　若 G 是一个连通的无割点（原文为"无桥"，不对。——译注）的 n 色图，它恰含一个度超过 $n-1$ 的点，则 G 是 n-线临界的。

［证明］　令 x 为 G 的任何一条线，考虑 $G-x$。一定有 $\delta(G-x) \leqslant n-2$，而且对 $G-x$ 的每一个导出子图 G'，$\delta(G') \leqslant n-2$。于是按定理 12.2，$\chi(G-x) \leqslant n-1$，这就蕴含 $\chi(G-x)=n-1$，所以 G 是 n-线临界的。

按定理 12.23，若 G 是一个 n-临界图，则 $2q \geqslant (n-1)p$。然而，对于线临界图，迪拉克 [D7] 改进了这个结果。

定理 12.27　若 G 是一个 n-线临界图，$n \geqslant 4$，且不是完全的，则

$$2q \geqslant (n-1)p+n-3。$$

7. 同态

在这一节中只考虑连通图比较方便。G 的一个初等同态是将两个不邻接的点等同起来。G 的一个同态是一系列初等同态。若 G' 是由 G 经过一个同态 ϕ 得到的图，我们可以将 ϕ 看作是从 V 到 V' 上的一个函数，使得若 u 和 v 在 G 中是邻接的，则 ϕu 和 ϕv 在 G' 中邻接。注意，G' 中的每一条线一定来自 G 中的某一条线，即如果 u' 和 v' 在 G' 中邻接，则在 G 中有两个邻接的点 u 和 v 使得 $\phi u=u'$ 和 $\phi v=v'$。我们说 ϕ 是 G 到 G' 上的一个同态，G' 是 G 的一个同态象，且记 $G'=\phi G$。于是特别地，每一个同构是一个同态*。道路 P_4 恰有 4 个同态象，如图 12.11 中所示。



图 12.11　道路 P_4 的同态象。

G 的一个同态若有 $\phi G=K_n$ 则称是 n 阶完全的。我们说 G 到 K_n 上的任何一个同态 ϕ 对应于 G 的一个 n-着色，因为 K_n 的点可以看作颜色，而按照同态的定义，G 的有同一种颜色的点没有一对是邻接的。每一个由一个完全同态定义的着色有如下的性质：对于任何两种颜色，有 G 的两个邻接的点 u 和 v 以这两种颜

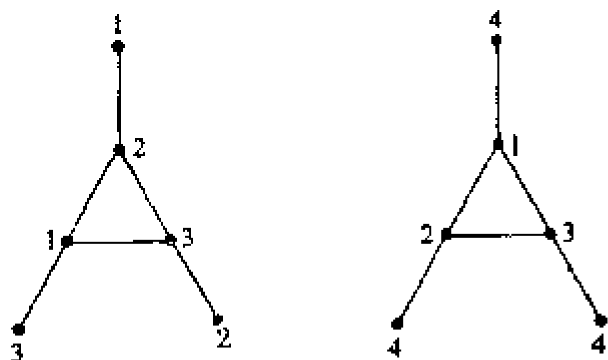


图 12.12　一个图的两种完全着色。

---

* 按照此处所说，上文定义的"同态是一系列初等同态"中的初等同态集可以是空集，而且当且仅当所说的初等同态集是空集时，一个同构可以看作是同态。
——译注

色着色。这种情形我们称为是一个完全着色。图12.12中画出了一个有3阶和4阶完全着色的图，其中用正整数来代表颜色。显然，G 的所有的完全同态中最小的阶一定是 $\chi(G)$。

下面的定理[HHP1]推广了属于哈乔斯[H3]的一个结果，后者现在成了这个定理的系。

定理 12.28 对于任何一个图 G 和 G 的任何一个初等同态 ε，

$$\chi(G) \leqslant \chi(\varepsilon G) \leqslant 1+\chi(G)。 \tag{12.16}$$

[证明] 令 ε 是在 G 中等同不邻接的点 u 和 v 的初等同态。则 εG 的任何一个着色产生 G 的一个着色。这时，对于 u 和 v 用的是一种颜色，所以 $\chi(G) \leqslant \chi(\varepsilon G)$。另一方面，$\varepsilon G$ 的一个着色可以由 G 的一个着色得到，只要这个新的点用一种与所有用于给 G 着色的颜色不同的颜色着色。所以 $\chi(\varepsilon G) \leqslant 1+\chi(G)$。

系 12.28(a) 对 G 的任何一个同态 ϕ，$\chi(G) \leqslant \chi(\phi G)$。

现在，自然而然的要考虑 G 的所有完全同态中最大的阶。这个不变量称为消色数，且记作 $\psi(G)$。因为 G 可以用 p 种颜色着色，显然 $\chi(G) \leqslant \psi(G) \leqslant p$。这两个不等式都不是对 ψ 的一个特别好的界。

定理 12.29 对于任何一个图 G 和 G 的任何一个初等同态 ε，

$$\psi(G)-2 \leqslant \psi(\varepsilon G) \leqslant \psi(G)。 \tag{12.17}$$

在图12.13中的例表示下界可以达到，因而是最好可能的。容易验证，此例中 $\psi(G)=5$ 而 $\psi(\varepsilon G)=3$。

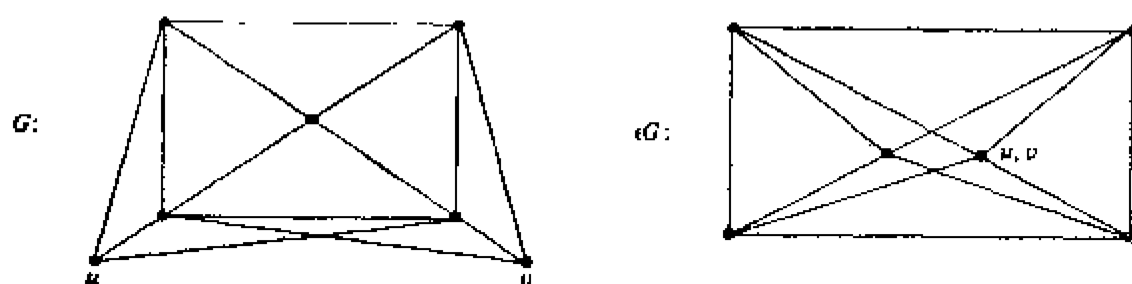


图 12.13 使 ψ 减少2的一个同态。

下一个结果在[HHP1]中称为同态内插定理，它强烈地依赖于(12.16)中给出的界。

定理 12.30　对于任何一个图 G 和任何一个在 χ 和 ψ 之间的整数 n，存在 G 的一个 n 阶完全同态（从而存在一个完全着色）。

［证明］　令 $\psi(G)=t$，又令 ϕ 为 G 到 K_t 上的一个同态。如果 ϕ 正好是一个同构，则 G 是 K_t，且 $\chi(G)=\psi(G)$。否则，我们可以记 $\phi=\varepsilon_m\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1$，其中每一个 ε_i 是一个初等同态。令 $G_1=\varepsilon_1 G$，$G_2=\varepsilon_2 G_1$，…，$K_t=G_m=\varepsilon_m G_{m-1}$。我们由 (12.16) 知道，对于每一个 i，$\chi(G_{i+1})\leqslant\chi(G_i)+1$。从 $\chi(G_m)=\psi(G)$ 可得，对于每一个满足 $\chi(G)\leqslant n\leqslant t=\psi(G)$ 的 n，在序列 $\{G_i\}$* 中存在一个图，例如 G_s，它有色数 n。这样 G_s 就有一个 n 阶完全同态 ϕ'。所以 $\phi'\varepsilon_s\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1$ 是 G 到 K_n 上的一个同态。

$\chi(G)$的许多上界也是 $\psi(G)$的上界。作为一个例，如在[HH1]中那样，我们推广在(12.3)和(12.4)中的上界。

定理 12.31　对于任何一个图 G，

$$\psi+\bar{\chi}\leqslant p+1。\tag{12.18}$$

下面的结果由(12.18)及 $\bar{\chi}\geqslant\beta_0$ 得到。

系 12.31(a)　对于任何一个图 G，

$$\psi\leqslant p-\beta_0+1。\tag{12.19}$$

这个结果也可以利用 (12.3) 的证明直接证明，它加强了 (12.3)。

8. 色多项式

一个图的色多项式是由伯克霍夫(Birkhoff)和刘易斯(Lewis)[BL1]在他们冲击4CC时引入的。令 G 是一个标定图。G 的一个至多 t 色的着色是 G 的一个用 t 种或不到 t 种颜色的着色。G 的两个至多 t 色的着色，如果各个标定了的点中至少有一个点被指定以不同的颜色，我们就认为是不同的。

我们用 $f(G,t)$ 记一个标定图 G 的不同的至多 t 色的着色的

* 原书为(G_i)。——译注

数目。当然，若 $t<\chi(G)$，则 $f(G, t)=0$。实际上，使 $f(G, t)>0$ 的最小的 t 是 G 的色数。于是 4CC 断言：对于每一个可平面图 G，$f(G, 4)>0$。

例如，有 t 种方式对 K_3 的任何一个给定的点着色。对它的第二个点，可以用 $t-1$ 种颜色中的任何一种。留下的这一点可以用 $t-2$ 种颜色中的任何一种。于是

$$f(K_3)=t(t-1)(t-2)。$$

这个式子可以推广到任何一个完全图*，

$$f(K_p, t)=t(t-1)(t-2)\cdots(t-p+1)=t_{(p)}。\qquad(12.20)$$

全不连通图 $\overline{K}_p$ 的相应的多项式特别容易得到。因为它的 p 个点每一个都可以独立地用 t 种颜色的任何一种着色，所以，

$$f(\overline{K}_p, t)=t^p。\qquad(12.21)$$

图 12.14 中的 $K_{1,4}$ 的中心点 v_0 可以用 t 种方式中任何一种着色，而每个端点可以用 $t-1$ 种方式中任何一种着色。所以，$f(K_{1,4}, t)=t(t-1)^4$。在这些例中每一个的 $f(G, t)$ 都是 t 的一个多项式。我们就会看到，这总是成立的。

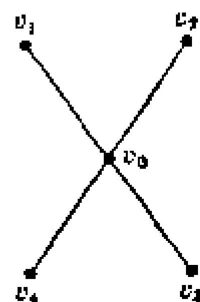


图 12.14　一个标定的 $K_{1,4}$。

定理 12.32　若在一个图 G 中，u 和 v 是两个不邻接的点，而 ε 是等同它们的初等同态，则

$$f(G, t)=f(G+uv, t)+f(\varepsilon G, t)。\qquad(12.22)$$

［证明］　这个方程可以直接由两个结果得到。首先，G 的至多 t 色的并且使 u 和 v 着以不同的颜色的着色的数目正好就是 $G+uv$ 的至多 t 色的着色的数目。第二，G 的至多 t 色的并且使 u 和 v 着以相同的颜色的着色的数目正好就是同态象 εG 的至多 t 色的着色的数目，其中 ε 等同 u 和 v。

这个定理现在蕴含：若 G 是任何一个不完全的 (p, q) 图，则有一个有 $q+1$ 条线的图 G_1 和一个有 $p-1$ 个点的图 G_2，使 $f(G, t)=f(G_1, t)+f(G_2, t)$。于是方程(12.22)可以应用于 G_1 和 G_2，以此类推，直到只出现完全图为止。从而，$f(G, t)$ 是 $f(K_p, t)$ 型

* 按照赖尔顿(Riordan)［R15］，我们将递降阶乘的表达式记作 $t_{(p)}$。

表达式的和。然而，$f(K_p, t)=t_{(p)}$ 是 t 的一个多项式。

系 12.32(a)　对于任何一个图 G，$f(G, t)$ 是 t 的一个多项式。

于是我们将 $f(G, t)$ 称为 G 的*色多项式*。为了说明这个定理，我们应用由季可夫 [Z1] 引入的一种办法。先不写明 t，而用图的一个图解来记它的色多项式。按照里德(Read) [R6] 的解释，我们用 u 和 v 来记每一步中考虑的不邻接的点。

于是对图 12.15 中的图 G，

$$f(G, t)=t_{(5)}+3t_{(4)}+t_{(3)}=t^5-7t^4+18t^3-20t^2+8t。$$

特别地，G 的至多 3 色的着色的数目是 $f(G, 3)=6$。

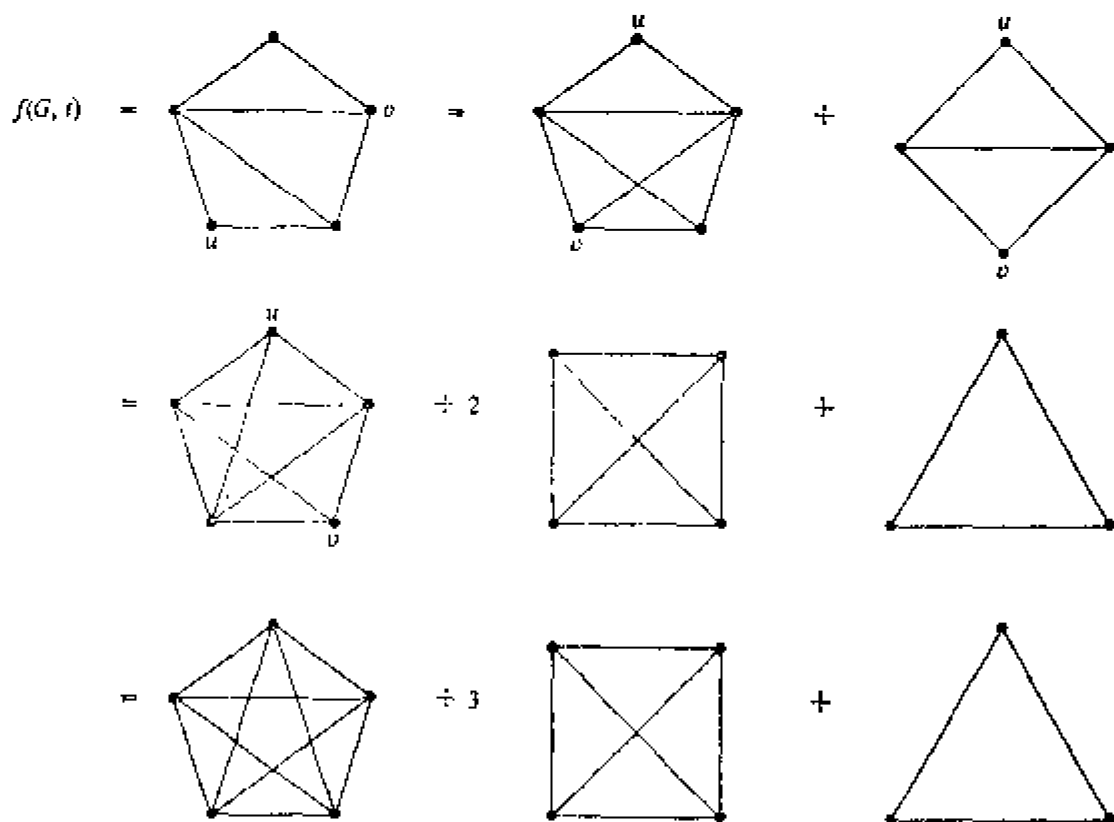


图 12.15　求色多项式。

色多项式有几个性质现在可以直接由定理 12.32 推得。

定理 12.33　令 G 是一个图，有 p 个点、q 条线和 k 个支 G_1、G_2、…、G_k。则

1．$f(G, t)$ 的次数为 p。

2．$f(G, t)$ 中 t^p 的系数为 1。

3. $f(G, t)$中t^{p-1}的系数为$-q$。

4. $f(G, t)$中常数项为0。

5. $f(G, t)=\prod_{i=1}^{k} f(G_i, t)$。

6. $f(G, t)$中有非零系数的t的最小次数为k。

下列结果并不是很明显的，它由惠特尼[W10]发现，并由罗塔(Rota)[R20]用包括麦比乌斯反演在内的几种有力的方法所推广。

定理 12.34 每一个色多项式的系数的符号是正负交替的。

每两个同构的图当然一定有相同的色多项式。但是，往往有几个不同构的图有相同的色项式；事实上，所有有p个点的树有相同的色多项式。

定理 12.35 一个有p个点的图G是一个树当且仅当

$$f(G, t)=t(t-1)^{p-1}。$$

[证明] 我们先证明每一个有p个点的标定树T以$t(t-1)^{p-1}$为它的色多项式。我们对p用归纳法。对$p=1$和$p=2$，结果是显然的。假定所有有$p-1$个点的树的色多项式由$t(t-1)^{p-2}$给出。令v是T的一个端点，又假定$x=uv$是T的关联于v的线。由假设，树$T'=T-v$的色多项式为$t(t-1)^{p-2}$。点v可以指定为任何一种与指定于u的颜色不同的颜色，所以v可以有$(t-1)$种方式着色。于是，$f(T, t)=(t-1)f(T', t)=t(t-1)^{p-1}$。

反之，令G是一个图，而$f(G, t)=t(t-1)^{p-1}$。因为$f(G, t)$中t的系数是1，由定理12.33(6)，G是连通的。而且，t^{p-1}的系数为$-(p-1)$，所以由定理12.33(3)，G有$p-1$条线。于是，由定理4.1，G是一个树。

给出有同一个色多项式的图的特征的问题还没有解决。还没有解决的另一个更基本的问题是决定怎样的多项式是色多项式。例如，多项式$t^4-3t^3+3t^2$满足色多项式的所有已知性质，但是它并不是色多项式。因为，如果它是某一个图G的$f(G, t)$，则G一定有4个点，3条线和2个支，所以$G=K_3\cup K_1$。然而，这个图的色多项式是

$$f(G,\ t)=t_{(3)}t=t^4-3t^3+2t^2。$$

里德[R6]猜想，每一个色多项式的系数的绝对值先是严格递增的，然后是严格递减的并且一直保持如此。

习题

12.1 关于两个图的联，有

a) $\chi(G_1+G_2)=\chi(G_1)+\chi(G_2)$，

b) G_1 和 G_2 是临界的当且仅当它们的联 G_1+G_2 是临界的。

12.2 若 $n\geqslant 3$ 是 G 中最长的奇圈的长度，则 $\chi(G)\leqslant n+1$。

（厄尔多斯和汉纳尔(Hajnal)[EH1]）

12.3 若 G 的点标以 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p$，使 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$，则 $\chi(G)\leqslant\max\limits_i\min\{i,\ d_i+1\}$。

（韦尔什和鲍威尔(Powell)[WP1]）

12.4 如果不是每条线都在一个哈密顿圈上，则 $\chi\leqslant 1+p/2$。

12.5 两个图的结合 $G_1\wedge G_2$ 的色数不超过每一个图的色数。

（S. T. 赫德尼米）

12.6 $(n+1)$色的 $n\geqslant 3$ 度正则连通图只有 K_{n+1}。

12.7 在(12.4)和(12.5)中达到上界的所有正则图是下面这些：

a) $\chi+\bar{\chi}=p+1$ 的只有 K_p，$\overline{K}_p$ 和 C_5。

b) $\chi\bar{\chi}=[((p+1)/2)^2]$的只有 K_1，$\overline{K}_2$，K_2 和 C_5。

（芬克[F4]）

12.8 a) 若 $p=p(G)$ 是一个素数，则只对 $\overline{K}_p$ 和 K_p 有 $\chi\bar{\chi}=p$。

b) $\chi^2+\bar{\chi}^2=p^2+1$ 当且仅当 $G=K_p$ 和 $\overline{K}_p$；否则，

$$\chi^2+\bar{\chi}^2\leqslant(p-1)^2+4。$$（芬克[F4]）

12.9 每一个外可平面图*是 3-可着色的。

12.10 每一个 4-连通平面地图是 4-可着色的。

12.11 在一个线图的任何一个着色中，每个点与至多二个颜

* 原书为“外可平面地图(outerplanar map)”。——译注

色相同的点邻接。

12.12 考虑一个不是奇圈的连通图 G，如果它的所有圈有同样的奇偶性，则 $\chi'(G)=\Delta(G)$。

(J. A. 邦迪和 D. J. A. 韦尔什)

12.13 求 K_p 和 $K_{m,n}$ 的线色数。

(贝扎特，夏特朗和库珀(Kooper)[BCC1])

12.14 若图 H 由 G 按下列作法得到：取 $V(H)=X(G)$；x，y 不在 G 的同一个完全子图内时它们邻接。则 $\chi(H)$ 等于并是 $V\cup X$ 的完全子图的最少数目。 (哈夫尔[H37])

12.15 每一个圆环图 $\delta\leqslant 6$，从而 $\chi\leqslant 7$。

12.16 存在一个有 9 个点的 5-临界图。

12.17 不完全的最小的唯一 3-可着色图是怎样的？

12.18 在一个有 p 个点的唯一 n-可着色图中最少有几条线？ (卡特赖特和哈拉里[CH2])

12.19 显然，任何一个图的色数至少等于 $\bar{\beta}_0$*。对于任何一个奇圈 C_{2n+1}，$n\geqslant 2$，$\bar{\beta}_0$ 等于 2 而 χ 等于 3。构造一个图，它没有三角形，$\bar{\beta}_0=2$ 而 $\chi=4$。(它只要 11 个点就可以构成。)

12.20 若 $\chi(G)=n\geqslant 5$，则有 n 个点，它们每两个至少由四条不相交的道路联结。 (迪拉克[D9])

12.21 对于任何两个整数 d 和 n，满足 $1<d\leqslant n$，有一个 n-临界图，使得 $\bar{\beta}_0=d$。 (豪斯(House)[H47])

12.22 a) 每一个 3 色最大可平面图是唯一 3-可着色的。

b) 至少有 3 个点的一个外可平面图 G 是唯一 3-可着色的当且仅当它是最大外可平面的。

(夏特朗和盖勒 [CG1])

12.23 一个 n-临界图不能被一个唯一 $(n-1)$-可着色子图的点所分离。 (哈拉里，赫德尼米和罗宾逊[HHR1])

12.24 对一个临界图 G 的点的任何一个独立集 S，$\chi(G-S)=\chi(G)-1$。 (迪拉克 [D12])

---

* $\bar{\beta}_0(G)=\beta_0(\bar{G})$。——译注

12.25　对一个图 G 的任何一个初等收缩 η, $|\chi(G)-\chi(\eta G)|\leqslant 1$。　　（哈拉里，赫德尼米和普林斯 [HHP1]）

12.26　求 P_n, C_n, W_n 和 $K_{m,n}$ 的消色数。

12.27　n-色数 $\chi_n(G)$ 是使任何一条长度为 n 的道路上所有的点不着以同样的颜色的 G 的着色法所需要的颜色的最少数目 m。

a）对于任何一个 n，有一个外可平面图 G，使 $\chi_n(G)=3$。

b）对于任何一个 n，有一个可平面图 G，使 $\chi_n(G)=4$。

（夏特朗，盖勒和赫德尼米 [CGH1]）

12.28　若 e 是 G 中的一条最长的道路的长度，则 $\chi(G)\leqslant e+1$。　　（加莱 [G4]）

12.29　任何一个图 G 的色数有下界

$$\chi(G)\geqslant p^2/(p^2-2q)。$$

第十三章 矩 阵

排成一列耐心等，
整整齐齐乱纷纷。
冷冷清清，死气沉沉。
　　诗人啊，
写一下他们吧！
但愿在你的诗篇中，
他们的生命烈焰腾腾。
——J. 鲁扎托

一个图由它的邻接性或关联性完全决定。这种信息可以用矩阵很方便地来表达。事实上，将一个图适当地标定以后可以给它联系上几个矩阵，其中有邻接矩阵，关联矩阵，圈矩阵和余圈矩阵。为了将一个图的某几种性质统一考虑，常常可以利用这些矩阵。关于图和矩阵的经典定理是矩阵-树定理，它给出在任何一个标定图中生成树的数目。我们还要讨论与一个图的圈矩阵和余圈矩阵有关的拟阵。

1. 邻接矩阵

有 p 个点的一个标定图 G 的邻接矩阵 $A=[a_{ij}]$ 是一个 $p\times p$ 阶的矩阵，其中，如果 v_i 邻接于 v_j 则 $a_{ij}=1$，否则，$a_{ij}=0$。于是在有 p 个点的标定图与对角线元素为零的 $p\times p$ 阶对称二元矩阵之间有一个一一对应。

图 13.1 中给出了一个标定图 G 和它的邻接矩阵 A。一个直接的结果是：A 的各个行和*是 G 的各个点的度。一般地，因为

* 即 A 的每一行元素之和。—— 译注

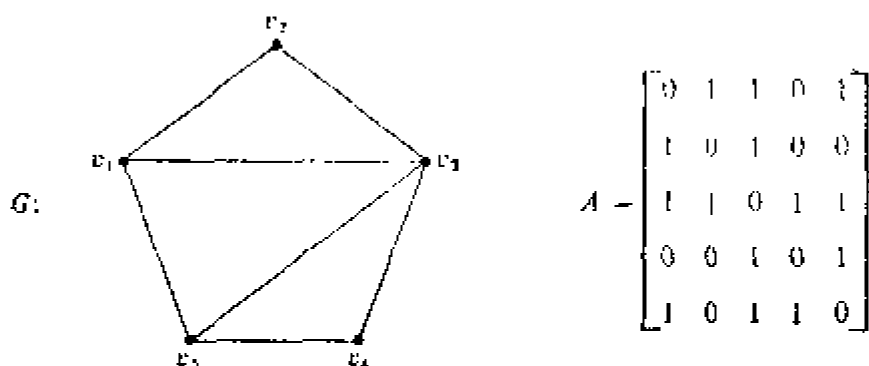


图 13.1 一个标定图和它的邻接矩阵。

图与矩阵之间的对应，任何一个图论概念都被反映到邻接矩阵中来。例如，记得在第二章中，我们说一个图是连通的当且仅当不存在G的点的一个划分$V=V_1\cup V_2$，使得没有一条线联结V_1的一个点与V_2的一个点。用矩阵的语言，我们可以说：G是连通的当且仅当没有G的点的一种标定法使得它的邻接矩阵有约化的形式

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中，A_{11}和A_{22}是方阵。若A_1和A_2是相应于同一个图G的两种不同的标定的邻接矩阵，则对于某一个置换矩阵P，

$$A_1=P^{-1}A_2P。$$

有时，标定法与结果没有关系，例如在下列解释邻接矩阵的幂的元素的结果中就是如此。

定理 13.1 令G是一个有邻接矩阵A的标定图，则A^n的i,j元是由v_i到v_j的长度等于n的通道的数目。

系 13.1(a) 对于$i\neq j$，A^2的i,j元是从v_i到v_j的长度为2的道路的数目。A^2的i,i元是v_i的度。A^3的i,i元是含v_i的三角形的数目的两倍。

系 13.1(b) 若G是连通的，对于$i\neq j$，v_i与v_j之间的距离是使A^n的i,j元不等于零的最小整数n。

一个标定有向图D的邻接矩阵类似地定义为

$$A=A(D)=[a_{ij}],$$

若弧 v_iv_j 在 D 中，则 $a_{ij}=1$，否则 a_{ij} 为零。于是 $A(D)$ 不一定是对称的。利用 $A(D)$ 得到的关于有向图的某些结果将在第十六章中给出。按照 $A(D)$ 的定义，一个给定的图的邻接矩阵也可以看作一个对称有向图的邻接矩阵。我们现在就用这种观点来研究一个图的邻接矩阵的行列式，详见[H27]。

一个有向图 D 的一个线性子图是它的一个生成子图，其中每个点的入度和出度都等于 1*。于是，它是由有向圈的一个不相交的生成集合所构成。

定理 13.2　若 D 是一个有向图，它的线性子图为

$$D_i,\ i=1,\ \cdots,\ n,$$

而且 D_i 中有 e_i 个偶圈，则

$$\det A(D)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{e_i}。$$

每一个图 G 对应于一个有向图 D，如果 v_i 和 v_j 在 G 中邻接，D 就有弧 v_iv_j 和 v_jv_i。在这种对应下，D 的每一个线性子图产生 G 的一个生成子图，它由点不相交的线和圈的一个集合构成，称为一个图的线性子图。G 的线性子图中由仅仅一条线组成的支对应于 D 的线性子图中的 2-圈，这个对应是一一的；但那些是 G 的圈的支对应于 D 中二个有向圈。因为当 G 和 D 具有上面所说的关系时，$A(G)=A(D)$，所以 $A(G)$ 的行列式可以算出来。

系 13.2(a)　若 G 是一个图，它的线性子图为 G_i，$i=1,\ \cdots,\ n$，其中 G_i 有 e_i 个偶支和 c_i 个圈，则

$$\det A(G)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{e_i}2^{c_i}。$$

2. 关联矩阵

第二个矩阵是关联矩阵 $B=[b_{ij}]$，它联系于点和线都标定了的图 G。在这个 $p\times q$ 阶矩阵中，当点 v_i 与线 x_j 关联时 $b_{ij}=1$，否则 $b_{ij}=0$。与邻接矩阵一样，关联矩阵决定 G 直到同构。事实上，B

---

* 入度和出度的定义见第十六章(p. 230)。——译者

的任何 $p-1$ 行就决定 G，因为它的每一行是其余行的以 2 为模的和。

下一个定理建立了 G 的线图的邻接矩阵与 G 的关联矩阵的联系。我们用 B^T 来记矩阵 B 的转置。

定理 13.3　对于任何一个 (p, q) 图 G，其关联矩阵为 B，则有

$$A(L(G)) = B^T B - 2I_q^{*}。$$

令 M 记一个矩阵，它由将 $-A$ 的第 i 个对角线元换成 $\deg v_i$ 得到。下列定理是在克希霍夫的先驱工作[K7]中的。

定理 13.4 (矩阵-树定理)　令 G 为一个有邻接矩阵 A 的连通的标定图，则矩阵 M 的所有余因子都相等，而且它们的公共值是 G 的生成树的数目。

[证明]　在证明的开头，我们将 G 的关联矩阵 B 的每一列中两个 1 的任何一个改为 -1，从而得到一个新的矩阵 E。(我们将在第十六章中看到，这样做相当于任意规定 G 的各线的方向，而取 E 为这个定向图的关联矩阵。)

EE^T 的 i, j 元是 $e_{i1}e_{j1}+e_{i2}e_{j2}+\cdots+e_{iq}e_{jq}$**。如果 $i=j$，它等于 $\deg v_i$；若 v_i 与 v_j 邻接，它等于 -1；否则等于零。从而，$EE^T=M$。

考虑 E 的任何一个由它的 $p-1$ 个列组成的子矩阵。这个 $p\times(p-1)$ 阶矩阵相应于 G 的一个有 $p-1$ 条线的生成子图 H。在这个矩阵中移去任意一行，例如第 k 行，得到一个 $p-1$ 阶方阵 F。我们要证明，取决于 H 是不是一个树，$|\det F|$ 等于 1 或者 0。首先，如果 H 不是一个树，则因为 H 有 p 个点和 $p-1$ 条线，它是不连通的。这就蕴含有一个支不含 v_k。因为相应于这个支的各个点的行是相关的，故 $\det F=0$。另一方面，假定 H 是一个树，在这种情形下，我们可以将它的线和它的除了 v_k 以外的点标定如下：令 $u_1\neq v_k$ 是 H 的一个端点（它的存在性由系 4.1(a) 保

---

* I_q 是 $q\times q$ 阶单位矩阵。——译注

** e_{ij} 是 E 的 i, j 元。——译注

证)，又令 y_1 是关联于它的线；令 $v_2 \neq v_k$ 是 $H-v_1$ 的任何一个端点，而 y_2 是关联于它的线，等等。这样重新标定 H 的点和线以后决定一个新的矩阵 F'，它可以由独立地置换 F 的行与列得到。于是，$|\det F'|=|\det F|$。然而，F' 是下三角形的，而且每个对角线元等于 $+1$ 或 -1；从而 $|\det F|=1$。

下列代数结果通常称为宾纳-柯西定理，现在是非常有用的。

引理 13.4(a) 若 P 和 Q 分别是 $m\times n$ 阶矩阵和 $n\times m$ 阶矩阵，$m\leqslant n$，则 $\det PQ$ 是 P 和 Q 的对应的最大行列式的积的和。

(P 或 Q 的一个最大行列式是 m 阶的，而"对应的最大行列式"是指在一个行列式中的 P 的列与另一个行列式中的 Q 的行的编号都相同。)

我们应用这个引理来计算 M 的第一个主余因子。令 E_1 是从 E 中划去第一行得到的 $(p-1)\times q$ 阶子矩阵。令 $P=E_1$ 和 $Q=E_1^T$。我们由引理可见，M 的第一个主余因子是 E_1 和 E_1^T 的对应的最大行列式的积的和。显然，对应的最大行列式有相同的值。我们已经见到，若 E_1 的列对应于 G 的一个生成树，它们的积为 1；否则为零。于是这些积的和正好是生成树的数目。

主的或不是主的所有的余因子的相等性对于每一个行和与列和都等于零的矩阵都成立。证毕。

为了说明矩阵-树定理，我们考虑一个任意取的标定图 G，例如图 13.2 中的 K_4-x。它有八个生成树，因为

$$M=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

的例如 2, 3 余因子为

$$-\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8。$$

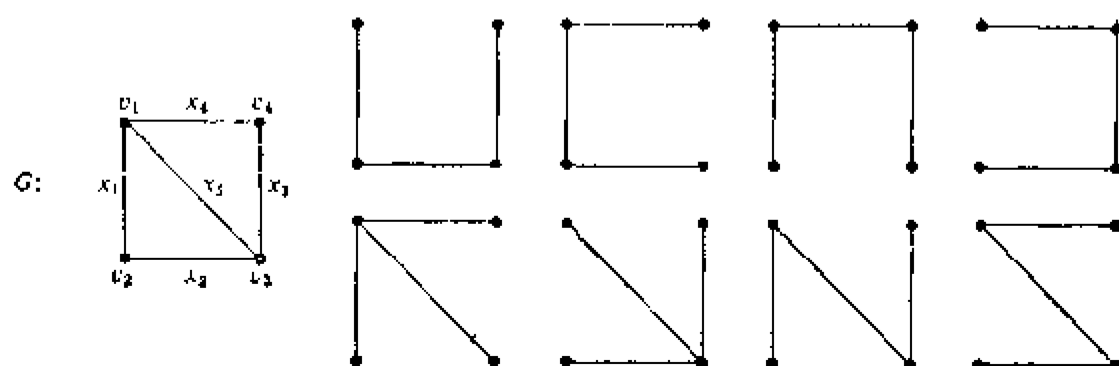


图 **13.2** K_4-x 和它的生成树。

有 p 个点的标定树的数目很容易将矩阵-树定理应用于 K_p 来求得。每一个主余因子是 $p-1$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} p-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & p-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & p-1 \end{vmatrix},$$

从其余每一行减去第一行，再将后面各列都加到第一列上产生一个上三角形矩阵，它的行列式等于 p^{p-2}。

系 13.4(a) 有 p 个点的标定树的数目为 p^{p-2}。

与这个公式有那么多次被独立地发现一样，它的证明方法亦是多种多样的，穆恩 [M15] 中提供了这些证明方法的一个有趣的汇编。

3. 圈矩阵

令 G 是线和圈都标定了的一个图。G 的圈矩阵 $C=[c_{ij}]$ 中对于每一个圈有对应一行而对于每一条线有对应一列。若第 i 个圈含有线 x_j，则 $c_{ij}=1$；否则 $c_{ij}=0$。与邻接矩阵和关联矩阵不同，圈矩阵并不决定一个图直到同构。显然，没有指明有没有不在任何一个圈上的线*。然而，甚至除这种线外，C 也不决定 G，如由图 13.3 中的一对图所示，它们都有圈

* 按这句话的意思，在圈矩阵中不为不在任何圈上的线设一列。因为假如对于每一条线都有对应的一列的话，不在任何圈上的线显然对应于全为零元的一列。——译注

$$Z_1=\{x_1,\ x_2,\ x_3\},\qquad Z_2=\{x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6\},$$
$$Z_3=\{x_6,\ x_7,\ x_8\},\qquad Z_4=\{x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\},$$
$$Z_5=\{x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_7,\ x_8\},\quad Z_6=\{x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_7,\ x_8\}。$$

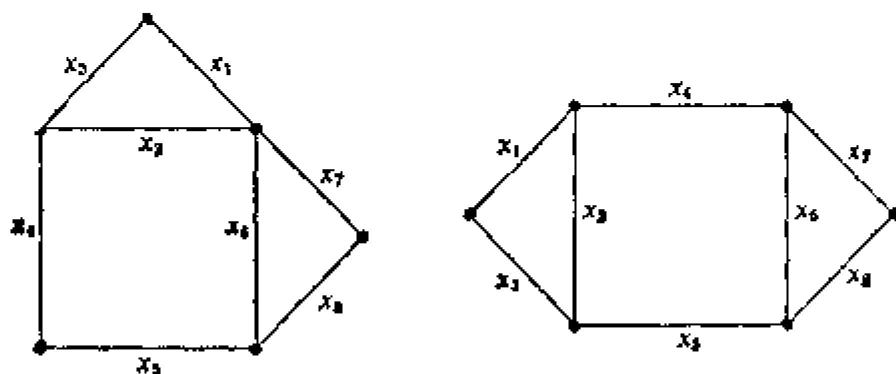


图 13.3　有同一个圈矩阵的两个图。

于是它们有公共的圈矩阵

$$C=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right] \end{array}\begin{matrix} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{matrix}。$$

下列定理提供了圈矩阵与关联矩阵之间的一个联系。在组合拓扑学中，这个结果是这样叙述的：任何一个链的边缘的边缘是零。

定理 13.5　若图 G 有关联矩阵 B 和圈矩阵 C，则

$$CB^T\equiv 0(\bmod 2)。$$

[证明]　考虑 C 的第 i 行和 B^T 的第 j 列，后者是 B 的第 j 行。在这两行中第 r 个元都不是零当且仅当 x_r 在第 i 个圈 Z_i 中并且它关联于 v_j。若 x_r 在 Z_i 中，则 v_j 也在 Z_i 中。但若 v_j 在这个圈中，则有 Z_i 的二条线关联于 v_j，所以 CB^T 的 i, j 元是

$$1+1\equiv 0(\bmod 2)。$$

与圈矩阵类似地可以定义余圈矩阵 $C^*(G)$。若 G 是 2 连通

的，则 G 的每一个点对应于由关联于它的各条线组成的余圈（最小割集）。所以，一个块的关联矩阵含在它的余圈矩阵中。

因为关联矩阵 B 的每一行是其余的行的模 2 的和，显然，B 的秩至多是 $p-1$。另一方面，若 B 的秩小于 $p-1$，则有少于 p 行的某个集，它们的模 2 的和等于零。但这样一来，就不能有一条线联结属于这些行的集中的一个点与不在这个集中的一个点，所以 G 就不能是连通的。于是我们就得到下一个定理的一部分。另一部分直接由第四章中的结果得到，那里给出了 G 的圈空间和余圈空间的维数。

定理 13.6　对一个连通图 G、圈矩阵 C、关联矩阵 B 和余圈矩阵 C^* 的秩为 $r(C)=q-p+1$ 和 $r(B)=r(C^*)=p-1$。

由定理 13.6，一个连通图的圈矩阵C 的一个重要的子矩阵是由代表一个圈基的任何 $m=q-p+1$ 个行给出的。每一个这样缩减而得的矩阵 $C_0(G)$ 是 C 的一个 $m\times q$ 阶子矩阵。类似地，缩减余圈矩阵 $C_0^*(G)$ 是 $m^*\times q$ 阶的，其中 $m^*=p-1$。于是由定理 13.5，我们立即有 $CC^{*T}\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$，从而也有 $C_0C_0^{*T}\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$。缩减关联矩阵 B_0 是由 B 中除去最后一行得到的。由前面的说明，这样缩减 B 并不损失讯息。

若用特殊的方法选取圈和余圈，则一个图的缩减的关联矩阵、圈矩阵和余圈矩阵有特别精巧的形式。记得在第四章中说过，任何一个生成树 T 决定 G 的一个圈基和一个余圈基。特别地，若 $X_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}\}$ 是 T 的杈（线）的集，又

$$X_2=\{x_p, x_{p+1}, \cdots, x_q\}$$

是它的弦的集，则在 $G-X_2+x_i$ 中，$p\leqslant i\leqslant q$，有唯一的一个圈 Z_i；而在 $G-X_1+x_j$ 中，$1\leqslant j\leqslant p-1$，有唯一的一个余圈 Z_j^*，这些圈和余圈的集分别对它们的空间构成基。例如，在图 13.4 的图 G 中，由所画的特定的生成树 T 决定的圈和余圈为

$$Z_4=\{x_1, x_2, x_4\}, \qquad Z_1^*=\{x_1, x_4, x_5\},$$
$$Z_5=\{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \qquad Z_2^*=\{x_2, x_4, x_5\},$$
$$Z_3^*=\{x_3, x_5\}。$$



图 13.4 一个图和它的一个生成树。

由 G 以及 T 的选法决定了各缩减矩阵，它们是：

$$B_0(G, T) = \begin{array}{c} \\ \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}}^{X_1} \quad \overbrace{\begin{array}{cc} x_4 & x_5 \end{array}}^{X_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array},$$

$$C_0(G, T) = \begin{array}{c} Z_4 \\ Z_5 \end{array} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right.}^{X_1} \overbrace{\left.\begin{array}{|cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]}^{X_2}$$

和

$$C_0^*(G, T) = \begin{array}{c} Z_1^* \\ Z_2^* \\ Z_3^* \end{array} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}^{X_1} \overbrace{\left.\begin{array}{|cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]}^{X_2}。$$

容易看出，这是下列对于任何一个连通图 G 和生成树 T 都成立的各个方程(都以 2 为模)的一种特殊情形：

$$B_0 = B_0(G, T) = [\overbrace{B_1}^{X_1} \ \overbrace{B_2}^{X_2}], \quad C_0 = C_0(G, T) = [\overbrace{C_1}^{X_1} \ \overbrace{I_m}^{X_2}]$$

和

$$C_0^* = C_0^*(G, T) = [\overbrace{I_{m^*}}^{X_1} \ \overbrace{C_2^*}^{X_2}],$$

其中，$C_1^T = B_1^{-1}B_2 = C_2^*$ 和 $C_0^* = B_1^{-1}B_0 = [I_{m^*} \ C_1^T]$。给定 G 和 T，由这些方程可以看到，分块矩阵 B_0、C_0 和 C_0^* 中任何一个都决定其余两个。

附记——再论拟阵

圈矩阵和余圈矩阵是第四章中所引入的图的圈拟阵和余圈拟阵的特殊代表。一个拟阵称为是图拟阵，若它是某个图的圈拟阵；称为是余图拟阵，若它是一个余圈拟阵。托特[T12]决定了怎样的拟阵是图拟阵或余图拟阵，从而无意中解决了电网络理论中以前没有解决的一个问题。

不是图拟阵也不是余图拟阵的一个拟阵的最小的例是由取 $M=\{1, 2, 3, 4\}$ 和 M 的所有3-元素子集为回路得到的自对偶拟阵。

托特 [T19] 给出不是图拟阵的另外一个例，它含有轮形图 $W_{n+1}=K_1+C_n$。它的圈拟阵有 n^2-n+1 个回路，因为在一个轮形图中有这么多数目的圈。对于这个拟阵，我们从回路的集中去掉构成轮的缘的圈 C_n，在这个集中再加入所有"有辐的缘"（见图13.5中的子图中的线的集），则可以证明，这样产生一个新的拟阵，它不是图拟阵或余图拟阵。这个拟阵称为一个 n 阶旋拟阵，它由 n^2 个回路所生成。

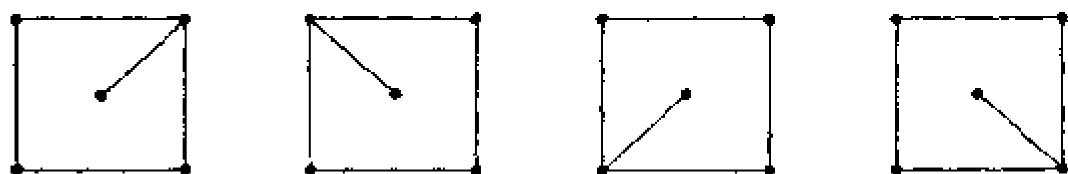


图 13.5 W_5 的旋拟阵中的新环路。

一个拟阵甚至是图拟阵也不一定又是余图拟阵。例如，K_5 的圈拟阵不是余图拟阵。事实上，一个拟阵既是图拟阵又是余图拟阵当且仅当它是某个可平面图的圈拟阵。

习题

13.1 a) 给出一个二部图的邻接矩阵的特征。

b) 一个图 G 是二部的当且仅当对所有奇的 n，A^n 的每一个对角线元都是 0。

13.2 令 G 是一个有邻接矩阵 A 的连通图，对 A 能说点什

么？若

a）v_i 是一个割点，

b）v_iv_j 是一条桥。

13.3　若 $c_n(G)$ 是一个有邻接矩阵 A 的图 G 中 n-圈的数目，则

a）$c_3(G)=\frac{1}{6}\operatorname{tr}(A^3)$*。

b）$c_4(G)=\frac{1}{8}[\operatorname{tr}(A^4)-2q-2\sum_{i\neq j}a_{ij}^{(2)}]$。

c）$c_5(G)=\frac{1}{10}[\operatorname{tr}(A^5)-5\operatorname{tr}(A^3)-5\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-2)a_{ii}^{(3)}]$。

（哈拉里和曼维尔[HM1]）

13.4　a）若 G 是一个不连通的标定图，则 M 的每一个余因子等于 0。

b）若 G 是连通的，则 G 的生成树的数目是 G 的各个块的生成树的数目的积。

（布鲁克斯，史密斯，斯通和托特[BSST1]）

13.5　令 G 是有线 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 的一个标定图。定义 $p\times p$ 阶矩阵 $M_x=[m_{ij}]$ 如下：

$$m_{ij}=\begin{cases}-x_k, & \text{若 } x_k=v_iv_j;\\ 0, & \text{若 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 不邻接,}\end{cases}\quad \text{对 } i\neq j,$$

$$-m_{ii}=\sum_{n\neq i}m_{in}。$$

G 的一个生成树的项是指它的线的积**。G 的树多项式定义为它的各个生成树的项的和。

变元矩阵-树定理是说：矩阵 M_x 的任何一个余因子的值是 G 的树多项式。

13.6　是否存在两个具有同一个圈矩阵的图，它们比图 13.3 中的图更小？

---

* $\operatorname{tr}(M)$ 是矩阵 M 的迹。——译注

** 意思是，若 G 的一个生成树含有线 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_t}$，称它相应的项是形式乘积 $x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_t}$。——译注

13.7 一个图的"圈拟阵"和"余圈拟阵"确实满足第四章中给出的拟阵的第一个定义。

13.8 若两个图 G_1 和 G_2 的多项式 $\det(A_1-tI)$ 和 $\det(A_2-tI)$ 相等，则这两个图称为是同谱的。只有二个不同的有 5 个点的同谱图。 (F. 哈拉里, C. 金(King)和 R. C. 里德)

13.9 若 $A(G)$ 的各个特征值都不同，则 G 的每一个非恒等的自同构是 2 阶的。 (莫肖维茨(Mowshowitz)[M17])

13.10 令 $f(t)$ 是一个次数最低的多项式(若这样的多项式存在)，使 $f(A)$ 的每个元等于 1，其中 A 是 G 的邻接矩阵。则一个图有这样的一个多项式当且仅当它是连通的和正则的。

(霍夫曼[H45])

13.11 如果存在一种划分，使元素的集 S 划分为回路，则此拟阵称为欧拉拟阵。

a) 一个图拟阵是欧拉的当且仅当它是一个欧拉图的圈拟阵。

b) 并不是每个欧拉拟阵是图拟阵。

13.12 在一个二元拟阵中，每一个回路和余回路的交的基数是偶数。一个二元欧拉拟阵的每一个余回路的基数是偶数。就是说，它如所预期的那样，一个二元欧拉拟阵的对偶是一个"二部拟阵"，后者如所预期的那样定义。 (韦尔什(Welsh)[W9])

第十四章　群

虎啊！虎啊！你金色辉煌，
火似地照亮
黑夜的林莽，
是什么神手和慧目
构成了你那可怕的
匀称体态？
——W·布莱克

从群的理论开始出现的时候起，它就为各种构形的对称性的研究提供了一种有趣而且有力的抽象方法，所以，对在群与图之间有一种特别有效的相互作用这一点就不足为奇了。为了给这个论题作好准备，我们将回忆一些关于群的基本的有关事实。特别是，我们将讨论几个对于置换群的运算。这些运算在图论中起重要的作用，因为它们与图的运算密切有关，并且是图的计数理论的基本工具。

一个给定的公理系统的任何一个模型有一个自同构群，图也并不例外。一个复合图的群在适当的情形下可以用它的组分图的群来给出特征。我们还要提出关于有给定的群和给定的结构性质的图的存在性的结果。这一章以研究对于它的点或线对称的图结束。

1．图的自同构群

首先，我们回忆一下群的通常定义。群由一个非空集 A 和一个二元运算构成，这个二元运算用连写 A 中的二个元素 α_1 和 α_2 成为 $\alpha_1\alpha_2$ 来记，并且它满足下列四个公理：

公理 1(封闭性)　对 A 中所有的 α_1, α_2, $\alpha_1\alpha_2$ 也是 A 的一个元素。

公理 2(结合性)　对 A 中所有的 α_1、α_2、α_3, 有

$$\alpha_1(\alpha_2\alpha_3)=(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3。$$

公理 3(单位元素)　A 中有一个元素 i, 对于 A 中所有的元素 α 有

$$i\alpha=\alpha i=\alpha。$$

公理 4(逆元素)　如果公理 3 成立，则对 A 中每一个元素 α, 有一个元素，记作 α^{-1}, 使

$$\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=i。$$

从一个有限集到它自身上的一个一一映射称为一个*置换*。映射的通常的复合，构成了同一个集上的置换的一个二元运算。此外，当置换的一个集对于这种运算封闭的时候，公理 2、3 和 4 自然满足，它就称为一个*置换群*。若一个置换群 A 作用在对象集 X 上，则 $|A|$ 称为这个群的*阶*，而 $|X|$ 称为是它的*度*。

A 和 B 分别为作用在集 X 和 Y 上的置换群，我们用 $A\cong B$ 来记 A 和 B 是*同构的群*，而以 $A\equiv B$ 来记 A 和 B 不仅同构而且是*恒等的置换群*。更明确地说，$A\cong B$ 是在这两个群的置换间存在一个一一映射 h: $A\leftrightarrow B$, 使对 A 中所有的α_1, α_2,

$$h(\alpha_1\alpha_2)=h(\alpha_1)h(\alpha_2)。$$

为了精确地定义 $A\equiv B$, 我们还需要另一个在对象间的一一映射 f: $X\leftrightarrow Y$, 使对 X 中所有的 x 和 A 中所有的 α,

$$f(\alpha x)=h(\alpha)f(x)。$$

一个图 G 的一个*自同构*是 G 与它自身的一个同构。于是，G 的每一个自同构 α 是点集 V 的一个保持邻接性的置换。当然，α 将任何一个点映至另一个与它的度相同的点。显然，任何一个自同构续以另一个自同构也是一个自同构，从而 G 的自同构构成一个作用在 G 的点上的置换群，$\Gamma(G)$。它称为 G *的群*，或有时称为 G 的*点群*。一个有向图 D 的群 $\Gamma(D)$可以类似地定义。

从 V 到 V 上的恒等映射当然总是 G 的一个自同构。对于某

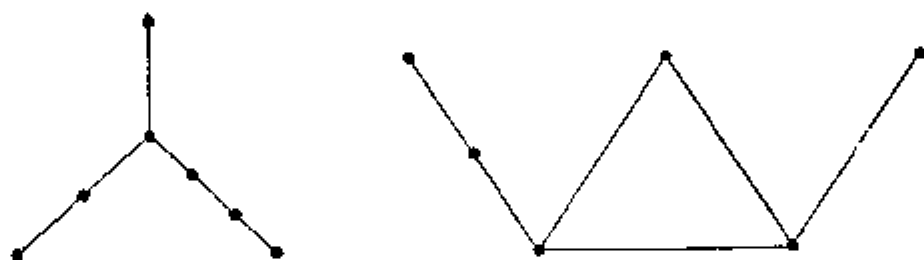


图 **14.1**　两个么图。

些图，这是一个仅有的自同构；这些图称为么图。最小的非平凡么树有 7 个点，画在图 14.1 中，其中还画了另一个有 6 个点的么图。

G 的点群导出另外一个置换群 $\Gamma_1(G)$，称为 G 的线群，它作用在 G 的线上。为了说明这两个群之间的区别，考虑图 14.2 中的 K_4-x。它的点标以 v_1、v_2、v_3、v_4，而线标以 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5。点群 $\Gamma(K_4-x)$ 由 4 个置换组成：

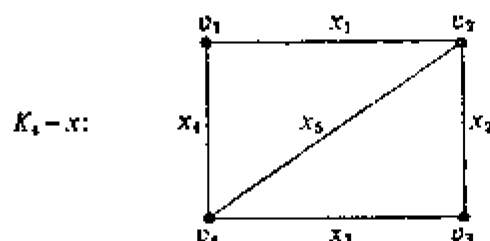


图 **14.2**　一个有标定的点和线的图。

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4),\quad (v_1)(v_3)(v_2v_4),$$
$$(v_2)(v_4)(v_1v_3),\quad (v_1v_3)(v_2v_4)。$$

点群的恒等置换导出线的恒等置换，而 $(v_1)(v_3)(v_2v_4)$ 导出线的一个置换，它使 x_5 不动而交换 x_1 与 x_4 及 x_2 与 x_3。按这种方式可以看出，线群 $\Gamma_1(K_4-x)$ 由下列置换组成，它们分别由点群的上列成员导出：

$$(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_5),\quad (x_1x_4)(x_2x_3)(x_5),$$
$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5),\quad (x_1x_3)(x_2x_4)(x_5)。$$

当然，K_4-x 的线群和点群是同构的，但它们确实不是恒等的置换群，因为 $\Gamma_1(K_4-x)$ 的度等于 5 而 $\Gamma(K_4-x)$ 的度等于 4。注意线 x_5 对于线群的每一个成员是不动的。但是，甚至将对象集限制为 x_1，x_2，x_3，x_4，由 $\Gamma_1(K_4-x)$ 得到的置换群也不与 $\Gamma(K_4-x)$ 恒等，因为这两个有相同的度的同构置换群有不同的循环结构。此外，还可以证明，甚至当两个置换群有相同的度和相同的循环结构时，它们仍然不一定是恒等的；见波立亚(Pólya)

[P5, p. 176]。

下一个定理[HP15]回答了下列问题：什么时候 $\Gamma(G)$ 和 $\Gamma_1(G)$ 是同构的？赛别度西[S1]用群论的方法证明了充分性。

定理 14.1　一个图 G 的线群和点群同构当且仅当 G 至多有一个孤立点，且 K_2 不是 G 的一个支。

[证明]　令 α' 是 $\Gamma_1(G)$ 中的置换，它由 $\Gamma(G)$ 中的置换 α 导出。按照 $\Gamma_1(G)$ 中积的定义，对于 $\Gamma(G)$ 中所有的 α, β，我们有

$$\alpha'\beta'=(\alpha\beta)'。$$

于是映射 $\alpha\to\alpha'$ 是从 $\Gamma(G)$ 到 $\Gamma_1(G)$ 上的一个群同态。从而

$$\Gamma(G)\simeq\Gamma_1(G)$$

当且仅当这个映射的核是平凡的。

为了证明必要性，假定 $\Gamma(G)\simeq\Gamma_1(G)$。则 $\alpha\neq i$（恒等置换）蕴含 $\alpha'\neq i$*。如果 G 有不同的孤立点 v_1 和 v_2，我们可以定义 $\alpha\in\Gamma(G)$ 为 $\alpha(v_1)=v_2$，$\alpha(v_2)=v_1$，而对所有 $v\neq v_1$、v_2 时，$\alpha(v)=v$。则 $\alpha\neq i$ 而 $\alpha'=i$。若 K_2 是 G 的一个支，取 K_2 的线为 $x=v_1v_2$，和上面完全一样地定义 $\alpha\in\Gamma(G)$ 得到 $\alpha\neq i$ 而 $\alpha'=i$。

为了证明充分性，假定 G 至多有一个孤立点且 K_2 不是 G 的一个支。若 $\Gamma(G)$ 是平凡的，则显然 $\Gamma_1(G)$ 使每一条线不动从而 $\Gamma_1(G)$ 也是平凡的。于是假定存在 $\alpha\in\Gamma(G)$ 使 $\alpha(u)=v\neq u$。则 u 的度等于 v 的度。因为 u 和 v 不都是孤立的，所以这个度不是零。以下分两种情形：

情形 1　u 邻接于 v。令 $x=uv$，因为 K_2 不是一个支，u 和 v 的度都大于 1。所以有一条线 $y\neq x$ 关联于 u，而 $\alpha'(y)$ 关联于 v。所以 $\alpha'(y)\neq y$，即 $\alpha'\neq i$。

情形 2　u 不邻接于 v。令 x 为任何一条关联于 u 的线。则 $\alpha'(x)\neq x$，所以 $\alpha'\neq i$。证毕。

---

* 符号 i 现在同时表示为作用于点集与线集的恒等置换，需要从上下文来区别它的含义。——译注

2. 置换群的运算

有几个对于置换群的重要运算，它们产生另外的置换群。我们现在讨论四个这样的二元运算：和、积、合成和幂群。

令 A 为一个置换群，其阶 $m=|A|$ 而度等于 d，此群作用在集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_d\}$ 上。又令 B 为另一个置换群，其阶 $n=|B|$ 和度等于 e，作用在集 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_e\}$ 上。例如，$A=C_3$，3 阶循环群，作用在 $X=\{1, 2, 3\}$ 上。则 C_3 的三个置换可以写成 $(1)(2)(3)$，$(1\,2\,3)$和$(1\,3\,2)$。又令 $B=S_2$，2 阶对称群，作用在 $Y=\{a, b\}$ 上，其置换为$(a)(b)$和(ab)。我们将用这两个置换群来说明这里定义的各个二元运算。

它们的和* $A+B$ 是一个置换群，它作用在不相交的并 $X\cup Y$ 上，它的元素是 A 中的置换 α 和 B 中的置换 β 的所有有序对，记作 $\alpha+\beta$。$X\cup Y$ 的任何一个元素 z 由 $\alpha+\beta$ 以下列规则置换：

$$(\alpha+\beta)(z)=\begin{cases}\alpha z, & \text{当 } z\in X;\\ \beta z, & \text{当 } z\in Y。\end{cases} \tag{14.1}$$

于是 C_3+S_2 有 6 个置换，每一个都可以写成置换 $\alpha\in C_3$ 和 $\beta\in S_2$ 的和，如$(1\,2\,3)(a\,b)=(1\,2\,3)+(a\,b)$。

A 和 B 的积** $A\times B$ 是一个置换群，它作用在集 $X\times Y$ 上，而它的置换是 A 中的置换 α 和 B 中的置换 β 的所有有序对，记作 $\alpha\times\beta$。如所想象，$X\times Y$ 的元素(x, y)由 $\alpha\times\beta$ 按下列规则置换：

$$(\alpha\times\beta)(x, y)=(\alpha x, \beta y)。\tag{14.2}$$

积 $C_3\times S_2$ 的阶也是 6；但是，虽然它们的和 C_3+S_2 的度等于 5，它们的积的度却等于 6。相应于和中的置换$(1\,2\,3)+(a\,b)$，在 $C_3\times S_2$ 中为置换$(1a\ 2b\ 3a\ 1b\ 2a\ 3b)$；其中为了简便起见，用 $1a$ 记$(1, a)$。

"A 绕 B"("A around B") 的合成*** $A[B]$ 也作用在 $X\times Y$

---

* 有时称为积或直接积，并用相应的记号来记。

** 也称为笛卡儿积；见[H18]。

*** 波立亚[P6]称为"群圈(Gruppenkranz)"，利特尔伍德 (Littlewood) [L3] 称为"圈积(Wreath product)"，并且还有其他名字。

上。对 A 中的每一个 α 和 B 中的 d 个(不必不同的)置换的序列 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d)$，在 $A[B]$ 中有唯一的一个置换，记作 $(\alpha; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d)$，使得对于 $X\times Y$ 中的 (x_i, y_j)，

$$(\alpha; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d)(x_i, y_j)=(\alpha x_i, \beta_i y_j)。\quad(14.3)$$

合成 $C_3[S_2]$ 的度等于 6，但它的阶等于 24。$C_3[S_2]$ 中的每一个置换可以写成作用在 $X\times Y$ 上的形式。仍旧将有序对 $(1, a)$ 记作 $1a$，用定义(14.3)可以验证：$((1\,2\,3); (a)(b), (a\,b), (a)(b))$ 可以表示为 $(1a\,2a\,3b\,1b\,2b\,3a)$。注意 $S_2[C_3]$ 的阶为 18，所以不同构于 $C_3[S_2]$。

*幂群** 记作 B^A，它作用在 Y^X 上，Y^X 是所有由 X 到 Y 内的函数的集。我们总是假定幂群所作用的有不止一个函数。对于每一对 A 中的置换 α 和 B 中的置换 β，在 B^A 中对应有唯一的一个置换，记作 β^α。我们用下列方程来规定 β^α 在 Y^X 中任何一个函数 f 上的作用，这个方程给出了每一个 $x\in X$ 在函数 $\beta^\alpha f$ 下的象：

$$(\beta^\alpha f)(x)=\beta f(\alpha x)。\quad(14.4)$$

幂群 $S_2^{C_3}$ 的阶等于 6 而度等于 8。应用 (14.4) 容易看出，由 $\alpha=(1\,2\,3)$ 和 $\beta=(a\,b)$ 得到的这个群中的置换有一个长度等于 2 的循环和一个长度等于 6 的循环。

表 14.1 总结了关于这四种运算每一种的阶和度的结果。

表 **14.1**　置换群的运算

			和	积	合　成	幂
群	A	B	$A+B$	$A\times B$	$A[B]$	B^A
对象	X	Y	$X\cup Y$	$X\times Y$	$X\times Y$	Y^X
阶	m	n	mn	mn	mn^d	mn
度	d	e	$d+e$	de	de	e^d

我们现在指出，这四种运算中有三种实在并不是不同的。

定理 14.2　三个群 $A+B$，$A\times B$，B^A 是同构的。

容易证明 $A+B\cong A\times B$。为了看出 $A+B\cong B^A$，我们定义映

* 还没有其他名字。

射 f: $B^A \to A+B$ 为 $f(\beta^\alpha)=\alpha^{-1}+\beta$*，并且可以验证 f 是一个同构。注意这三种运算都是可交换的；事实上，$A+B=B+A$，$A\times B\cong B\times A$，$B^A\cong A^B$。

表 14.2 为五个有名的度等于 p 的置换群引进了记法。用了这些术语，我们可以描述出两族有 p 个点的熟悉的图的群。

表 14.2　度等于 p 的置换群

	记　号	阶	定　　义
对称群	S_p	$p!$	$\{1, 2, \cdots, p\}$ 上的所有置换
交代群	A_p	$p!/2$	$\{1, 2, \cdots, p\}$ 上的所有偶置换
循环群	C_p	p	由 $(1\,2\cdots p)$ 生成
二面体群	D_p	$2p$	由 $(1\,2\cdots p)$ 和 $(1\,p)(2\,p-1)\cdots$ 生成
单位元素群	E_p	1	唯一的一个置换 $(1)(2)\cdots(p)$。

定理 14.3　a) 群 $\Gamma(G)$ 是 S_p 当且仅当 $G=K_p$ 或 $G=\overline{K}_p$。

b) 若 G 是长度等于 p 的一个圈，则 $\Gamma(G)=D_p$。

于是两个特殊的度等于 p 的置换群，S_p 和 D_p，属于有 p 个点的图。对于所有 $p\geqslant 6$，存在有 p 个点的么图，而且事实上，当 $p\geqslant 7$ 时有一个么树。

3. 复合图的群

我们现在已经可以研究联系于一个图的群了，这个图是由其他的图经过各种运算得来的。因为一个图的任何自同构保持邻接性和不邻接性，立即可以得到一个明显的然而是重要的结果。

定理 14.4　一个图和它的补图都有同一个群，

$$\Gamma(\overline{G})=\Gamma(G)。\tag{14.5}$$

一个“复合图”是一个或几个运算作用于不相交的图上得到的结果。一个复合图的群常常可以用它的组分图的群来表示。弗鲁协 (Frucht) [F10] 叙述了一个图 nG 的群，这个图由一个连通图 G 不相交地重复 n 次而成。

---

* 原书为 $f(\alpha;\beta)=\alpha^{-1}\beta$，这与以前所述记号不符。——译注

定理 14.5　若 G 是一个连通图，则

$$\Gamma(nG)=S_n[\Gamma(G)]。\tag{14.6}$$

为了说明这个定理，考虑图 $G=5K_3$。它的群是 $S_5[S_3]$。G 的一个自同构总可以如下得到：先对这 5 个三角形每一个任意施行一个自同构，然后再对这些三角形之间施行任意一个置换。

定理 14.6　若 G_1 和 G_2 是不相交的、连通的而且不同构的图，则

$$\Gamma(G_1\cup G_2)\equiv\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2)。\tag{14.7}$$

任何一个图 G 总可以写为 $G=n_1G_1\cup n_2G_2\cup\cdots\cup n_rG_r$，其中 n_i 是 G 的同构于 G_i 的支的数目。应用上面两个定理，我们有结果，

$$\Gamma(G)=S_{n_1}[\Gamma(G_1)]+S_{n_2}[\Gamma(G_2)]+\cdots+S_{n_r}[\Gamma(G_r)]。\tag{14.8}$$

系 14.6(a)　两个图的并的群是它们的群的和，

$$\Gamma(G_1\cup G_2)\equiv\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2)\tag{14.9}$$

当且仅当 G_1 没有一个支同构于 G_2 的一个支。

由定理 14.4，上述的系和两个图的联的补图是它们的补图的并，

$$\overline{G_1+G_2}=\overline{G}_1\cup\overline{G}_2,\tag{14.10}$$

即可得到下一个系。

系 14.6(b)　两个图的联的群是它们的群的和，

$$\Gamma(G_1+G_2)\equiv\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2)\tag{14.11}$$

当且仅当 $\overline{G}_1$ 没有一个支同构于 $\overline{G}_2$ 的一个支。

对于一个非平凡图 G，若 $G=G_1\times G_2$ 蕴含 G_1 或 G_2 是平凡的，则 G 称为是素的；若 G 不是素的，则它称为是复合的。

赛别度西 [S5] 注意到图的笛卡儿积是交换的和结合的。他也导出了一个准则，用来判定两个图的积的群是否是它们的群的积。因为他证明了一个非平凡图是素图的唯一的积，所以两个图互素的意义是明确的。

定理 14.7　当且仅当 G_1 和 G_2 是互素时，两个图的积的群是它们的群的积，即

$$\Gamma(G_1\times G_2)\equiv\Gamma(G_1)\times\Gamma(G_2)。\qquad(14.12)$$

赛别度西[S4]提供了一个准则，用来判定两个图的字典式积（合成）的群是它们的群的合成，从而解决了[H21]中提出的问题。一个点 u 的邻域是由所有与 u 邻接的点 v 构成的集 $N(u)$。闭邻域 $N[u]=N(u)\cup\{u\}$。

定理 14.8　若 G_1 不是全不连通的，则当且仅当下列两个条件

1. 若 G_1 中有两个点有相同的邻域，则 G_2 是连通的，
2. 若 G_1 中有两个点有相同的闭邻域，则 $\bar{G}_2$ 是连通的，

成立时，两个图 G_1 和 G_2 的合成的群是它们的群的合成，即

$$\Gamma(G_1[G_2])\equiv\Gamma(G_1)[\Gamma(G_2)]。\qquad(14.13)$$

由这些结果，所有有 $p\leqslant 4$ 个点的图的群都可以用符号表示出来，其中之一，即 K_4-x 的群已经在前面说过。不连通的图的群没有在表 14.3 中给出，但可以应用定理 14.4 得到。

表 14.3　小的连通图的群

图	群	图	群
	S_1		S_1+S_2
	S_2		S_2+E_2
	S_3		D_4
	E_1+S_2		$S_2[E_2]$
	S_4		E_1+S_3

使两个图的字典式积的群恒等于它们的群的合成的条件是相当复杂。因此提出了构成另外一种图的运算来实现它们的群的合

成，但只能实现到群同构。

两个图 G_1 和 G_2 的冠 $G_1\circ G_2$ 是弗鲁协和哈拉里 [FH1] 定义的，它是一个图 G，由取一个 G_1（它有 p_1 个点）和 p_1 个 G_2，然后联结 G_1 的第 i 个点和第 i 个 G_2 的每一个点来构成。对于图 $G_1=K_2$ 和 $G_2=K_{1,2}$，两个不同的冠 $G_1\circ G_2$ 和 $G_2\circ G_1$ 画在图 14.3 中。由冠的定义可得，$G_1\circ G_2$ 有 $p_1(1+p_2)$ 个点和 $q_1+p_1q_2+p_1p_2$ 条线。

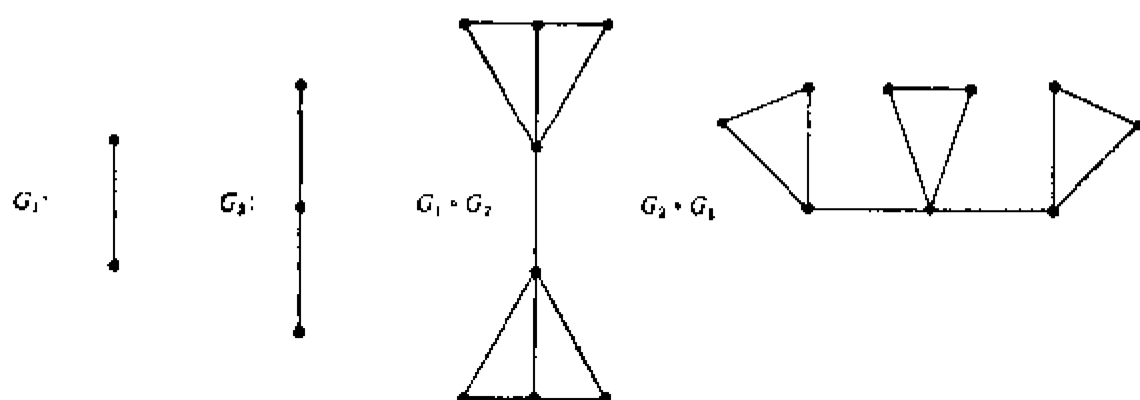


图 14.3 两个图和它们的两个冠。

定理 14.9 当且仅当 G_1 或 $\overline{G}_2$ 没有孤立点时，两个图 G_1 和 G_2 的冠的群可以用它们的群的合成显记为

$$\Gamma(G_1\circ G_2)\equiv\Gamma(G_1)[E_1+\Gamma(G_2)]。\tag{14.14}$$

应用系 14.6(a)到(14.4)中的项 E_1，就得到下列结果。

系 14.9(a) 当且仅当 G_1 或 $\overline{G}_2$ 没有孤立点时，两个图的冠 $G_1\circ G_2$ 的群同构于它们的群的合成 $\Gamma(G_1)[\Gamma(G_2)]$。

4. 有给定群的图

科尼希[K10, p. 5]问：什么时候一个给定的抽象群同构于某个图的群？弗鲁协[F8]构造地给出了这个问题的一个肯定的回答。他在证明每一个群是某一个图的群时利用了凯来的"一个群的色图"[C4]，我们现在就来定义它。令 $F=\{f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}\}$ 是一个 n 阶有限群，它的单位元素是 f_0。对于 F 中的每一个不是单位元素的元素 f_i，指定一种不同的颜色。F 的色图，记作 $D(F)$，是一个完全的对称有向图，它的点是 F 的 n 个元素。此外，对于

$D(F)$ 的每一条弧，例如由 f_i 到 f_j 的弧，标上指定给 F 的元素 $f_i^{-1}f_j$ 的颜色。当然，实际上我们只是简单地在 $D(F)$ 的点和弧上标上 F 的元素。

例如，考虑 3 阶循环群，$C_3=\{0, 1, 2\}$。色图 $D(C_3)$ 画在图 14.4 中。

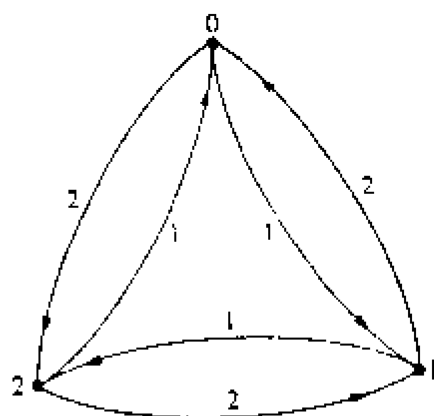


图 14.4　循环群 C_3 的色图。

弗鲁协注意到了下列结果，它虽然简单却是非常有用的。

引理 14.10(a)　每一个有限群 F 同构于 $D(F)$ 的那些保持弧的颜色的自同构的群。

为了构造一个图 G，它的群 $\Gamma(G)$ 同构于 F，弗鲁协用一个双根图来代替 $D(F)$ 中的每一条弧 f_if_j*，对于具有同一种颜色的每一条弧，我们在代换时就用同一个图去代换它。代换弧 f_if_j 的图我们画在图 14.5 中。令 $f_i^{-1}f_j=f_k$，引进新的点 $\{u_m\}$ 和 $\{v_m\}$，使在图 14.5 中联结 u_i，u_j 和 v_i，v_{j+1} 的道路分别含有 $2k-2$ 和 $2k-1$ 个点。事实上，弗鲁协的这种构造是对每一条弧 f_if_j 指定一种有色无向箭头。于是得到的图 G 有 $n^2(2n-1)$ 个点，且 $\Gamma(G)\cong F$。

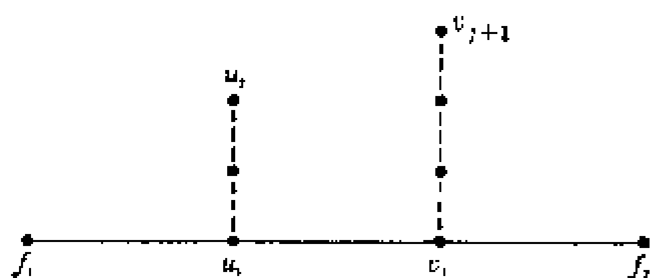


图 14.5　代替弧 f_if_j 的双根图。

定理 14.10　对于每一个有限的抽象群 F，存在一个图 G，使 $\Gamma(G)$ 与 F 同构。

由循环群 C_3 按这种方法得到的图画在图 14.6(*a*) 中。由这个例子显然可以看出，用这种办法构成的任何一个图中的点是太多了。当一个群已知有 $m<n$ 个生成元素时，可以得到一个点数

* 在这一节中，并写 F 的两个元素有时表示它们在 F 中的积，有时表示 $D(F)$ 中的一条弧。——译注

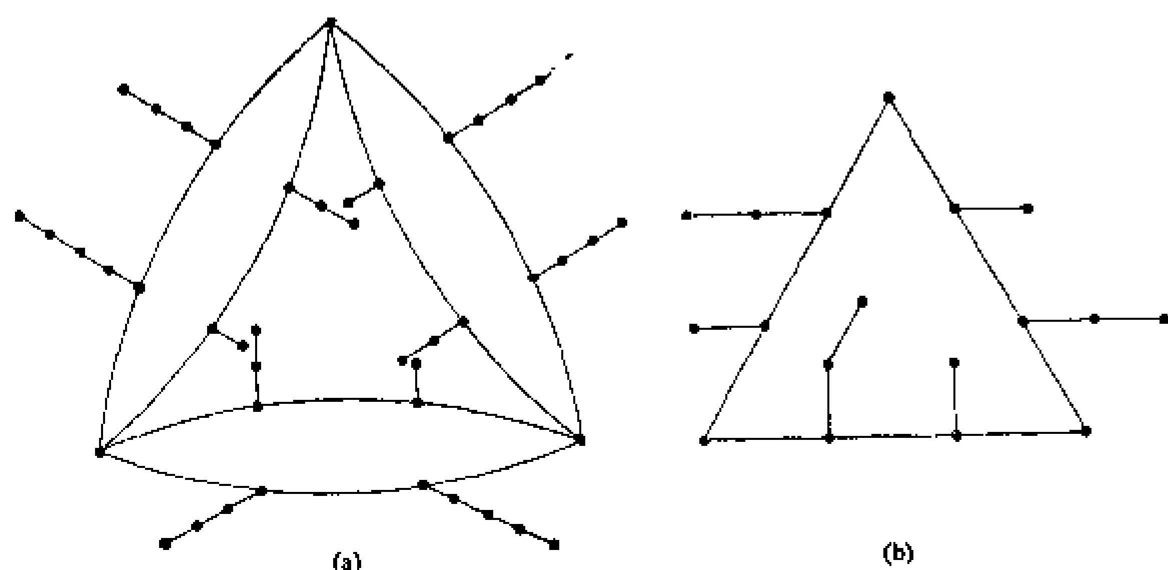


图 14.6 群是 C_3 的弗鲁协图和一个较小的这种图。

比较少的图具有这个给定的群。在这种情形，色图修正为只含有相应于 m 个生成元素的那些有向线。于是对于一个给定的群，可以得到一个含有 $n(m+1)(2m+1)$ 个点的图。因为 C_3 可以由一个元素生成，所以对于 C_3 有一个有 18 个点的图，它画在图 14.6(b) 中。

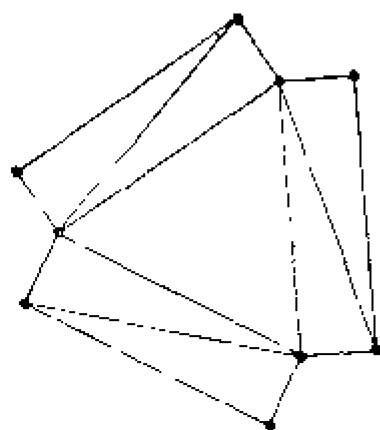


图 14.7 群为 C_3 的一个最小图。

甚至这样改进了的方法也不够好，这可以从图 14.7 中的图看出。这个图是自同构群为 3 阶循环群的二个最小图之一 [HP3]，它只有 9 个点和 15 条线。

后来，弗鲁协[F9]证明，也可以限定 G 是一个三次图。于是很明显，要求 G 有一个给定的自同构抽象群并不是一个严格的限制。事实上，赛别度西[S2]证明了，可以同时有许多图除了具有一个给定的抽象群外还具有几种别的特性之一，例如连通度、色数和正则度。

定理 14.11 给定任何一个有限的，抽象的，非平凡的群 F 和一个整数 $j(1\leqslant j\leqslant 4)$，有无限多个不同胚的图 G，使 G 为连通的，没有一个点在每一个自同构下都是不动点，$\Gamma(G)\simeq F$，G 还具有性质 P_j，它们定义为：

P_1: $\kappa(G)=n$, $n\geqslant 1$,

P_2: $\chi(G)=n$, $n\geqslant 2$,

P_3: G 是 n 度正则的, $n\geqslant 3$,

P_4: G 有一个生成子图,它同胚于一个给定的图。

在定理 14.11 发表以后，伊兹别基(Izbicki)[I1] 探讨了构造一个既有给定的群又同时满足这些条件中的几个图的问题。利用赛别度西[S2]的关于两个图的积的结果并且作了某种构造，他可以得到一个关于具有任意色数的任意度数的正则图的相应结果。

系 14.11(a) 给定任何一个有限群 F 和整数 n 和 m，其中 $n\geqslant 3$ 及 $2\leqslant m\leqslant n$，有无限多个图 G，使 $\Gamma(G)\cong F$，$\chi(G)=m$，且 G 是 n 度正则的。

5. 对称图

图中对称性的研究由福斯特(Foster)[F6]所创始，他列出了一个对称三次图的表。图 G 的两个点 u 和 v 称为相似的，若对 G 的某一个同构 α，$\alpha(u)=v$。不相似于其他任何一点的点称为不动点。两条线 $x_1=u_1v_1$ 和 $x_2=u_2v_2$ 称为相似的，若有 G 的一个自同构 α，使 $\alpha(\{u_1, v_1\})=\{u_2, v_2\}$。我们只考虑没有孤立点的图。一个图是点对称的，若它的每一对点是相似的；它是线对称的，若它的每一对线是相似的；它是对称的，若它既是点对称的又是线对称的。图 14.8 中给出了最小的点对称而不线对称的图(三棱形 $K_3\times K_2$)及最小的线对称而不点对称的图(星形图 $K_{1,2}$)。

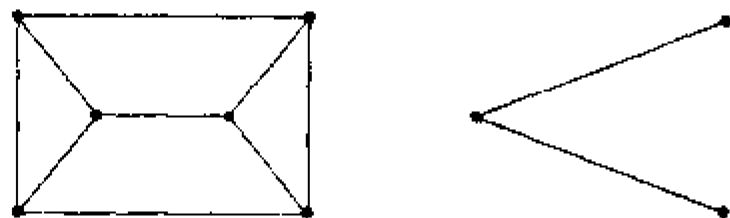


图 14.8 一个点对称的图和一个线对称的图。

注意，若 α 是 G 的一个自同构，则显然 $G-u$ 和 $G-\alpha(u)$ 是同构的。于是，若 u 和 v 是相似的，则 $G-u\cong G-v$。这个命题的逆

命题竟然出乎意料地不成立*。图 14.9 中的图提供了一个反例。它有不相似的点 u 和 v，使得 $G-u\cong G-v$，并且这个图是最小的，见[HP5]。

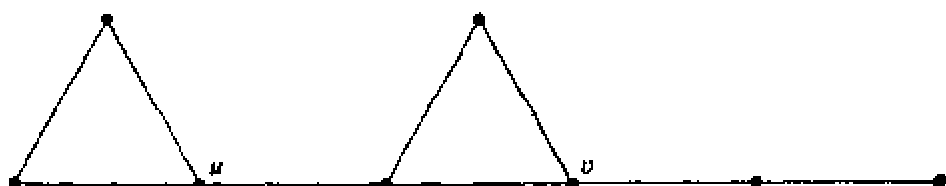


图 14.9 一个猜想的一个反例。

一条线 $x=uv$ 的度是无序对(d_1, d_2)，其中 $d_1=\deg u$ 和 $d_2=\deg v$。一个图是线正则的，若所有的线都有相同的度。在图 14.10 中画了一个完全二部图 $K_{2,3}$，它是线对称的，但不是点对称的，而且是 (2, 3) 度线正则的。

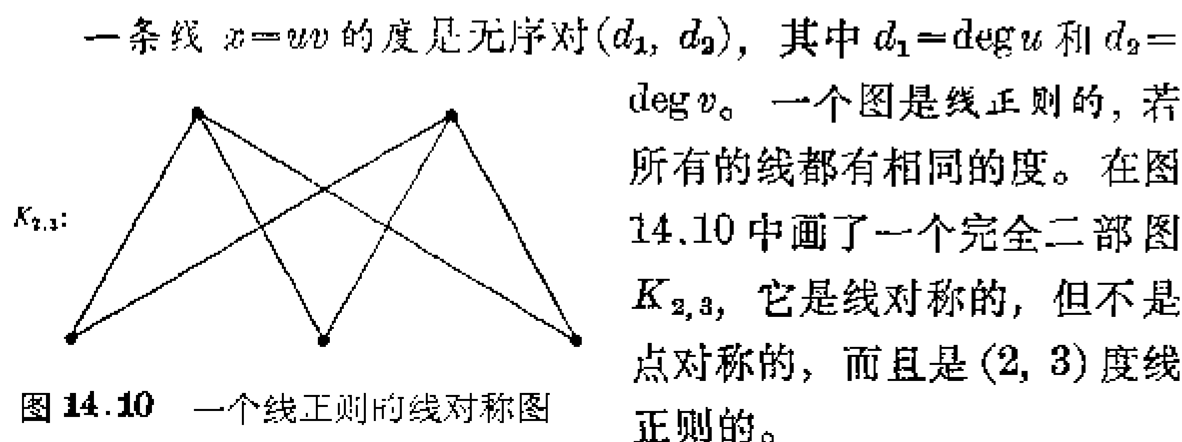


图 14.10 一个线正则的线对称图

下面我们叙述一个属于爱伦-道伯 (Elayne-Dauber) 的定理，它的系描述了线对称图的性质。注意下列显然的然而重要的结果：每一个线对称图是线正则的。

定理 14.12 每一个没有孤立点的线对称图是点对称的或是二部的。

[证明] 考虑一个没有孤立点的线对称图 G，它有 q 条线。则对于任何一条线 x，至少有 G 的 q 个自同构 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ 将 x 映到 G 的各条线上。令 $x=v_1v_2$, $V_1=\{\alpha_1(v_1), \cdots, \alpha_q(v_1)\}$ 及 $V_2=\{\alpha_1(v_2), \cdots, \alpha_q(v_2)\}$。因为 G 没有孤立点，V_1 和 V_2 的并是 V。有两种可能性：V_1 和 V_2 是不相交的或者不是不相交的。

情形 1. 若 V_1 和 V_2 是不相交的，则 G 是二部的。

考虑 V_1 中任何两个点 u_1 和 w_1。若它们是邻接的，则有一条线 y 联结它们。从而对某个自同构 α_i 我们有 $\alpha_i(x)=y$。这就蕴含这两个点中有一个是在 V_1 中，而另一个在 V_2 中，这是一个矛

* 乌拉姆猜想的一个看来成立实在是错误的证明强烈地依赖于这个逆命题。

盾。从而 V_1 和 V_2 构成 V 的一个划分，使得没有一条线联结在同一个子集中的两个点。按定义，G 是二部的。

情形 2. 若 V_1 和 V_2 不是不相交的，则 G 是点对称的。

令 u 和 w 是 G 的任意两个点，我们要证明 u 和 w 是相似的。若 u 和 w 都在 V_1 中或都在 V_2 中，令 α 是一个自同构，它将 x 映到关联于 u 的一条线上。又令 β 将 x 映到关联于 w 的一条线上，则 $\beta\alpha^{-1}(u)=w$。所以在同一个子集中的任何两个点 u 和 w 是相似的。若 u 在 V_1 中和 w 在 V_2 中，令 v 是既在 V_1 中又在 V_2 中的一个点。因为 v 既相似于 u 又相似于 w，u 和 w 是互相相似的。

系 14.2(a)　若 G 是线对称的，且每一条线的度是 (d_1, d_2)，而 $d_1\neq d_2$，则 G 是二部的。

系 14.2(b)　若一个没有孤立点的图是线对称的，有奇数个点，又每一条线的度为 (d_1, d_2)，而 $d_1=d_2$，则它是点对称的。

系 14.2(c)　若 G 是线对称的，有偶数个点，它又是 $d\geqslant p/2$ 度正则的，则 G 是点对称的。

由这三个系，还没有给出特征的线对称图只有那些有偶数个点而且是 $d<p/2$ 度正则的图。有 6 个点的多边形是这种线对称图的一个例子，它既是点对称的又是二部的。二十面体，十二面体和彼得森图是点对称但不是二部的线对称图的例子。但是，福克曼 (Folkman) [F5] 发现，并不是所有正则线对称图都是点对称的。

定理 14.13　当 $p\geqslant 20$ 且可以被 4 除尽时，存在一个有 p 个点的正则图 G，它是线对称的但不是点对称的。

6. 高度对称图

按照托特 [T10] 的定义，一条 *n-路* 是一条长度为 n 且有确定的起点的通道，其中没有一条线接在它自己的后面。一个图 G 称为 *n-可迁的*，$n\geqslant 1$，若它有一条 n-路，并且对于 G 的每一条 n-路总有一个自同构将它映到另外任何一条 n-路上。显然，一个任何长度的圈对于所有的 n 是 n-可迁的。另外，一条长度为 n 的道路

是 n-可迁的。注意并不是每一个线对称图是 1-可迁的。例如，图 14.8 中的线对称图 $K_{1,2}$ 中没有一个自同构将 1-路 uv 映到 1-路 vw 上。

若 W 是一条 n-路 $v_0v_1\cdots v_n$，又 u 是除 v_{n-1} 外任何一个邻接于 v_n 的点，则 n-路 $v_1\cdots v_nu$ 称为 W 的一条后继。若 W 的终点是 G 的一个端点，则显然 W 没有后继。正是为了这个原因，我们在下面两个定理中限定 G 是一个没有端点的图。我们现在有一个 n-可迁性的充分条件[T20, p. 60]。

定理 14.14　令 G 是一个没有端点的连通图。若 W 是一条 n-路，使得对于 W 的每一条后继有 G 的一个自同构将 W 映到这条后继上，则 G 是 n-可迁的。

在 n-可迁性与一个图的围长之间有一个直接的关系[T20, p. 61]。

定理 14.15　若 G 是连通的、n-可迁的，而不是一个圈，它没有端点，围长为 g，则 $n\leqslant 1+g/2$。

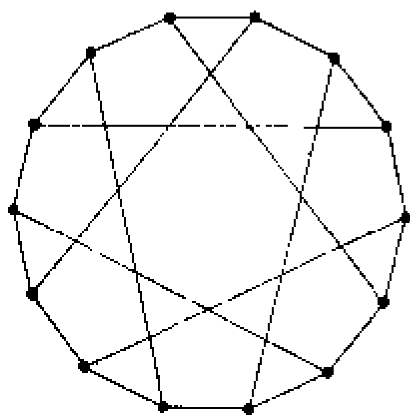


图 14.11　希伍德图。

用定理 14.14 可证明图 14.11 中的希伍德图是 4-可迁的；而且，由定理 14.15 容易证明这个图不是 5-可迁的。

有一些正则图称为"笼"，在某种意义上说，它们有比 n-可迁图更高的对称性。一个图 G 称为是 n-单可迁的*，若它是连通的，三次的，n-可迁的，而且若有任何两条 n-路 W_1 和 W_2，G 恰有一个自同构 α，使 $\alpha W_1=W_2$。对于 $n\geqslant 3$，一个 n-笼是一个有最少可能数目的点而围长等于 n 的三次图。下一个命题提出了关于笼的知识[T20, pp. 71～83]。

定理 14.16　对于每一个 $n\geqslant 3$，存在一个 n-笼。对于 $n=3$ 到 8，有唯一的 n 笼。这些笼都对于某个 $t=t(n)$ 是 t 单可迁的，其中 $t(3)=2$，$t(4)=t(5)=3$，$t(6)=t(7)=4$ 和 $t(8)=5$。

---

* 在[T2, p. 62]中称为 n-正则的(n-regular)。

所有已知的笼都有了专门的名称。

表 **14.4**　已知的笼

n	n-笼	n	n-笼
3	K_4(画在图 2.1 中)	6	希伍德图(图 14.11)
4	$K_{3,3}$(图 2.5)	7	麦克吉(McGee)图(图 **14.12**)
5	彼得森图(图 9.6)	8	勒维(Levi)图(图 14.13)

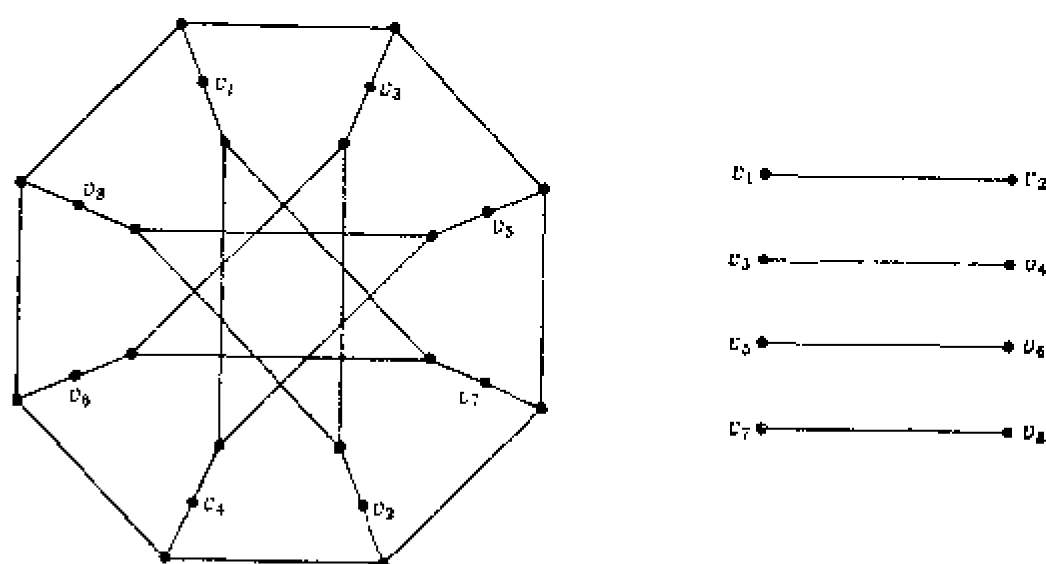


图 14.12　7-笼是上列子图按所注标定的并。

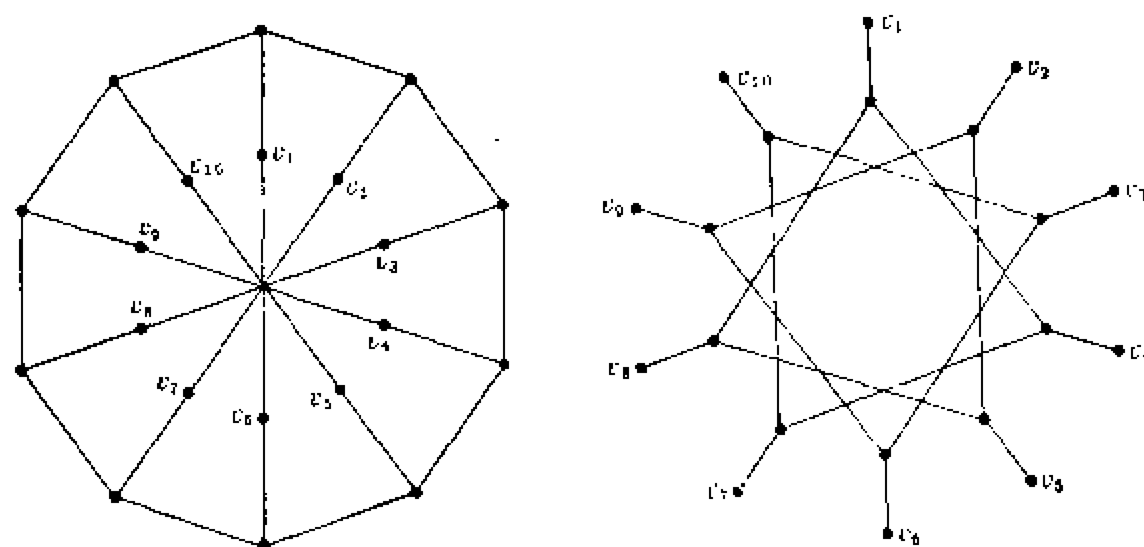


图 14.13　8-笼是上列子图按所注标定的并。

对于 $n>5$, 没有 n-可迁的三次图, 从而没有 n 单可迁的三次图; 见托特[T8]。然而, 对 $n\leqslant 5$, 除笼外还有别的 n 单可迁图。

特别是，弗鲁协[FH]构成了一个1-单可迁图，它的围长为12，有432个点。方体 Q_3 和十二面体(图1.5)是2-单可迁的。考克斯特[C10]发现了除了4-笼和5-笼以外的几个3-单可迁图。其中之一画在图14.14中。

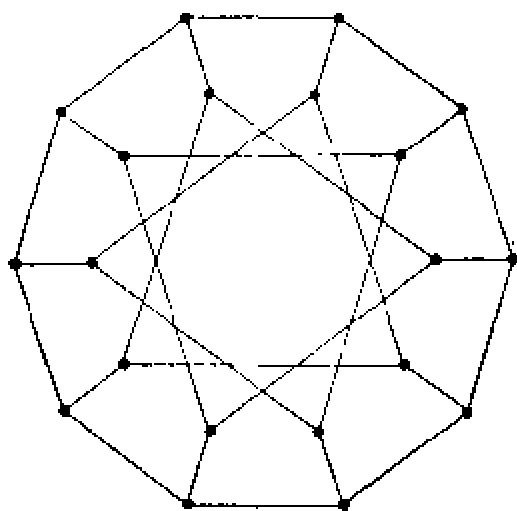


图 **14.14**　另一个3-单可迁图。

这个图是在[CH3]中定义的一族图中的一个。对于 S_p 中的任何一个置换 α，一个标定图 G 的 α-置换图是不相交的两个 G：G_1 和 G_2 的并*，再加上联结 G_1 的点 v_i 和 G_2 的点 $v_{\alpha(i)}$ 的线。于是，图14.14给出了圈 C_{10} 的一个置换图。本书封面上画的是 C_5 的所有四个置换图。

习题

14.1　求下列各图的群：

(a) $\overline{3K_2}$,　　(b) $\overline{K}_2+C_4$,　　(c) $K_{m,n}$,

(d) $K_{1,2}[K_2]$,　　(e) $K_4 \cup C_4$。

14.2　若 G 有一个点，它不在一个长度等于4的圈上，则 G 是素的。　　(赛别度西[S2])

14.3　令 G 是连通的，$p>3$，则 $L(G)$ 是素的当且仅当 G 不是 $K_{m,n}$，$m, n\geqslant 2$。　　(帕尔默[P1])

14.4　构造一个有9个点和15条线的图(它与图14.7不同)，它的群是3阶循环群。　　(哈拉里和帕尔默[HP3])

14.5　构造一个有11个点的连通图，它的群是6阶循环群。

14.6　构造一个有14个点的图，它的群是7阶循环群。

(赛别度西[S3])

***14.7**　令 $c(m)$ 是一个具有与 C_m 的群同构的群的图中点的最少数目。则对于 $m=n^r$，其中 n 是素数，$c(m)$ 的值为：

---

* 即将 G 不相交地画两次，分别记作 G_1 和 G_2。——译注

a) $c(2)=2$, $c(2^r)=2^r+6$,　当 $r>1$。

b) $c(n^r)=n^r+2n$　对 $n=3, 5$。

c) $c(n^r)=n^r+n$　对 $n\geqslant 7$。

[注：当 m 不是一个素数的幂时，$c(m)$ 也可以算出，但表达式更复杂。]　(R. L. 梅里韦什(Meriwether))

14.8　没有少于 6 个点的非平凡幺图。

14.9　没有少于 12 个点的三次幺图。

14.10　构造一个三次图，它的群是 3 阶循环群。

14.11　彼得森图的群恒等于 K_5 的线群。

14.12　存在一个图 G，它的群是二面体群 D_p，但 G 不是一个圈或它的补图。使这个条件成立的最小的 p 等于多少？

14.13　对于 $p\geqslant 3$，没有一个图 G 使 $\Gamma(G)\equiv A_p$ 或 C_p。当 $p\geqslant 4$ 时，没有一个有向图 D 使 $\Gamma(D)\equiv A_p$。

(卡格纳(Kagno)[K1]，哈拉里和帕尔默[HP10])

14.14　具有同构于 S_n, $n\geqslant 3$, 的群的连通图只有

a) 有 n 个点的是 K_n,

b) 有 $n+1$ 个点的是 $K_{1,n}$,

c) 有 $n+2$ 个点的是 $K_1+\overline{K}_{1,n}$。

(格维尔兹(Gewirtz)和昆塔斯(Quintas)[GQ1])

14.15　给定一个有限群 F，令 $G(F)$ 是由弗鲁协定理得到的图，则 $G(F)$ 的每一个非恒等的自同构没有不动点。

14.16　含有不相似点 u 和 v 使 $T-u\cong T-v$ 的最小的树是什么？　(哈拉里和帕尔默[HP2])

14.17　每一个连通的点对称图 G 是一个块。

14.18　一个星多边形是一个图 G，它有一个生成圈 $v_1v_2\cdots v_pv_1$，使得若 v_1v_n 在 G 中时，则对所有 $j-i\equiv n-1 \pmod p$ 的线 v_iv_j 都在 G 中。一个点的数目 p 是素数的连通图是点对称的当且仅当它是一个星多边形。　(特纳(Turner)[T4])

14.19　证明或否定下列 8 个陈述：若两个图是点对称的(线对称的)，则它们的联，积，合成和冠也是点对称的(线对称的)。

14.20　每一个奇数度的对称的连通图是1-可迁的。

（托特[T20, p. 59]）

14.21　每一个对称的，连通的三次图对于某个 n 是 n-可迁的。　　（托特[T20, p. 63]）

14.22　找出使得一个图的点群和线群恒等的必要充分条件。

（哈拉里和帕尔默[HP15]）

14.23　若 G 是连通的，则 $\Gamma(G)\cong\Gamma(L(G))$ 当且仅当 $G\neq K_2$，$K_{1,3}+x$，K_4-x 或 K_4。　　（惠特尼[W11]）

14.24　若 G 是点对称的，则 $\Gamma(G)$ 是形式为 $S_2+S_2+\cdots+S_2$ 的一个群。　　（麦克安德鲁[M8]）

14.25　度等于 p 的双可迁置换群仅有 S_p 是图的群。

14.26　令 A 和 B 是两个分别作用在集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_d\}$ 和 Y 上的置换群。**指数群** $[B]^A$ 是作用在 Y^X 的各个函数上的置换群，对于 A 中每一个置换 α 和 B 中的置换的每一个序列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d$，在 $[B]^A$ 中有唯一的一个置换 $[\alpha; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d]$，使对 X 中的 x_i 和 Y^X 中的 f，

$$[\alpha; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d]f(x_i)=\beta_i f(\alpha x_i)。$$

则方体 Q_n 的群为 $[S_2]^{S_n}$，而 $K_{n,n}$ 的线群为 $[S_n]^{S_2}$。

（哈拉里[H18]）

***14.27**　存在唯一的一个最小图，它是4度正则的，围长等于5，有19个点而且它的群同构于二面体群 D_{12}。

（罗伯逊[R18]）

14.26　令 G 为一个3-连通的可平面的 (p, q) 图，它的群的阶等于 s，则 $4q/s$ 是一个整数；此外，$s=4q$ 当且仅当 G 是五个柏拉图图之一。

（温伯格(Weinberg)[W8]，哈拉里和托特[HT4]）

14.29　任何一个树的群可以由对称群经过和及合成两种运算得到。　　（波立亚[P5, p. 209]）

14.30　在 n 个对象上的 $p-1$ 个对换 (u_1v_1)，(u_2v_2)，$\cdots$ 的集生成对称群 S_p 当且仅当有 p 个点和 $p-1$ 条线 u_iv_i 的图是一个

树。 (波立亚[P5])

14.31 一个标定的2-连通图G的α-置换图是可平面的当且仅当G是外可平面的,并且G可以画在平面上将它的点循环标定以后使得α在二面体群D_p中。 (夏特朗和哈拉里[CH3])

***14.32** G的一个自同态是G到它自身内的一个同态。一个图的*半群*是它的所有自同态的集。每一个有单位元素的有限半群同构于某个图的半群。

(赫德林(Hedrlin)和普尔脱(Pultr)[HP23])

***14.33** 只有恒等自同态的最小非平凡图有8个点。

(赫德林和普尔脱[HP24])

第十五章 计　　数

我怎么来爱你呢？让我看看有几种办法。

——E·B·勃朗宁

组合数学中的计数方法与其说是一种科学，还不如说它是一种艺术；随着更一般的和更有力的观点和技术的发现和发展，我们希望这种局面将得到扭转。在图的计数理论方面的先驱是凯莱、雷德菲尔德(Redfield)和波立亚。如在[HP11]中所说，事实上，目前应用的所有的图的计数方法在雷德菲尔德[R8]的1927年发表的唯一的一篇论文中都已经预料到了。但是，不幸这篇论文被忽视了。

我们将从历史上最早的计数问题开始，它们是关于标定图的。然后提出波立亚的经典的计数定理，并且用它来导出对于树和其他各种类型的图的计数级数。波立亚的定理现在已经推广为幂群计数定理，它对于等价类由二个置换群来决定的某些计数问题是有用的。为了完备起见，我们列出一张已经解决了的和还没有解决的图的计数问题的表来结束这一章。

1. 标定图

图15.1中画出了所有有3个点的标定图。我们看到，有3个点的4个不同的图成为8个不同的标定图。为了求有p个点的标定图的数目，我们只要注意$\binom{p}{2}$条可能有的线都有存在或者不存在两种情形。

定理15.1　有p个点的标定图的数目等于$2^{\binom{p}{2}}$。

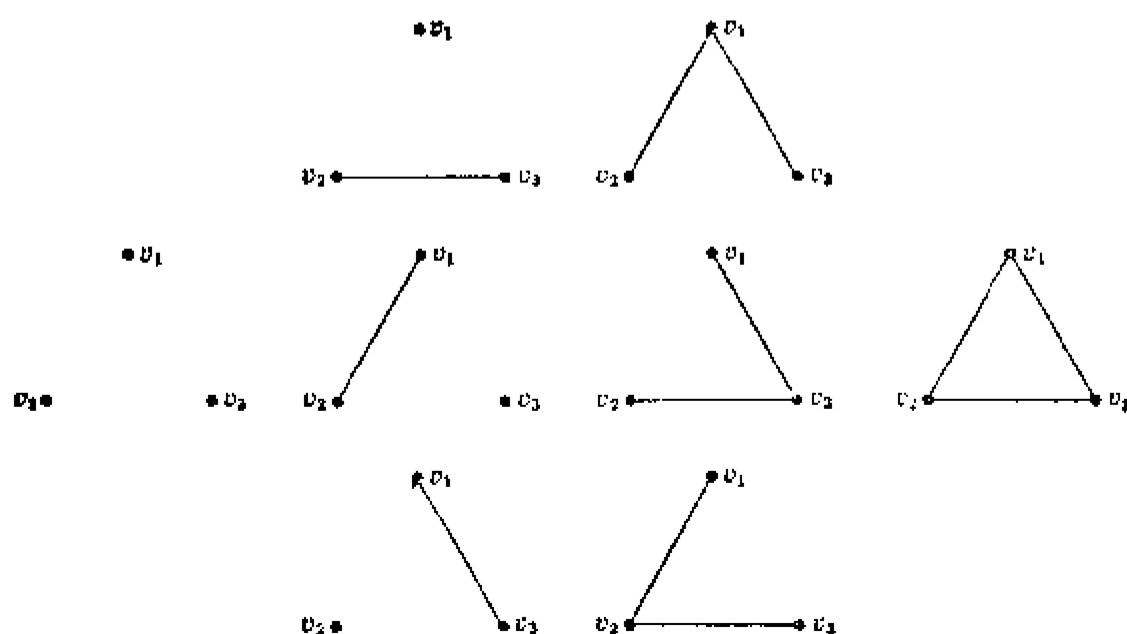


图 15.1　有 3 个点的标定图。

系 15.1(a)　标定的(p, q)图的数目等于

$$\binom{\binom{p}{2}}{q}。$$

凯来[C6]第一个表述了对于树的相应的结果：有 p 个点的标定树的数目等于 p^{p-2}。自从 1889 年它的论文发表以后，发现了许多种不同的证法来得到他的公式。穆恩[M15]提出了这些不同的证法的一个概述，其中的一种已经在系 13.4(a)中给出。

图 15.2 中是有 4 个点的所有 16 个标定树。这些树的标定理解为第一个和最后一个树所记的那样。我们注意到，在这 16 个标

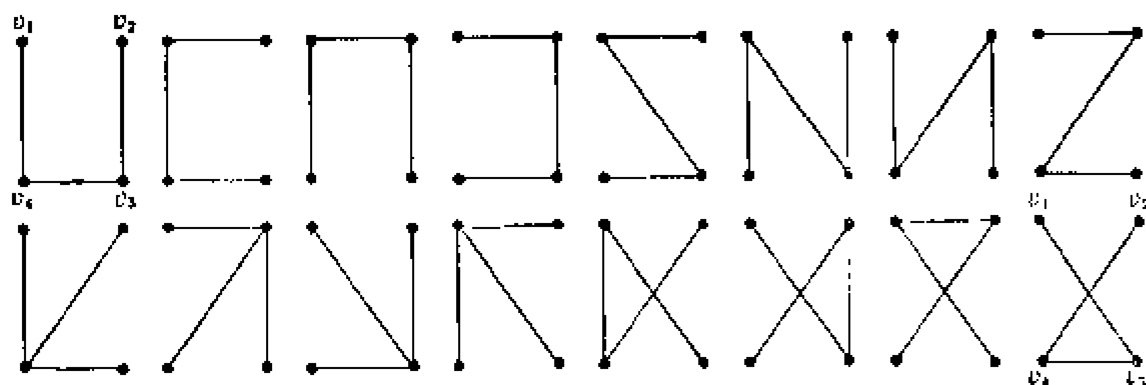


图 15.2　有 4 个点的标定树。

定树中有12个同构于道路 P_4，另外4个同构于 $K_{1,3}$。$\Gamma(P_4)$ 的阶等于2，$\Gamma(K_{1,3})$的阶等于6。我们看到，因为这里的 $p=4$，故有 $12=4!/|\Gamma(P_4)|$ 和 $4=4!/|\Gamma(K_{1,3})|$。从这两个结果可以预期的推广不仅对于树成立，而且也对于图、有向图、关系等等成立；见[HR1]和[HPR1]。

定理 15.2　用来标定一个给定的图的方式的数目等于 $p!/|\Gamma(G)|$。

证明概要　令 A 是作用在对象集 X 上的一个置换群。对于 X 中的任何一个元素 x，x 的轨 $\theta(x)$是 X 的一个子集，它含有 X 中所有这样的元素 y：对于 A 中的某一个置换 α，有 $\alpha x=y$。x 的稳定核 $A(x)$是 A 的一个子群，它由 A 中所有使 x 不动的置换组成。于是，应用有名的公式 $|\theta(x)||A(x)|=|A|$ 及这个公式在目前情形下的解释，就得到要证的结果。

2. 波立亚计数定理

许多计数问题是按这样一种形式归结的，即最终要求得到由一个置换群决定的轨(可递系)的数目的公式。这些轨常常还分别指定有一个权，波立亚[P5]给出了求按照它们的权来计数轨的公式的办法，它依赖于给定的群中各个置换的循环结构。波立亚定理又依赖于伯恩赛德(Burnside)[B20, p. 191]的一个有名的计数公式的一个推广。

定理 15.3　令 A 为作用在集 X 上的一个置换群，它有轨 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$，又令 w 是一个函数，它对每一个轨指定一个权。此外，w 也定义在 X 上，使当 $x\in\theta_i$ 时，$w(x)=w(\theta_i)$。则轨的权的和由下式给出：

$$|A|\sum_{i=1}^{n} w(\theta_i)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{x=\alpha x} w(x)。\qquad(15.1)$$

[证明]　我们已经看到，群 A 的阶 $|A|$ 等于对于 X 中的任何一个 x 的积 $|A(x)||\theta(x)|$，其中 $A(x)$是 x 的稳定核。同时，因为权函数在一个给定的轨的元素上是常数，可见对于每个轨 θ_i，

$$|\theta_i|w(\theta_i)=\sum_{x\in\theta_i}w(x)。$$

联合以上这些结果，我们得到，

$$|A|w(\theta_i)=\sum_{x\in\theta_i}|A(x)|w(x)。$$

对所有的轨求和，我们有

$$|A|\sum_{i=1}^{n}w(\theta_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\theta_i}|A(x)|w(x),$$

由此即可得到(15.1)。

伯恩赛德引理的改进形式现在可以叙述为这个定理的一个系。对于一个置换 α，表示为不相交循环的积，令 $j_k(\alpha)$ 是长度等于 k 的循环的数目。

系 15.3(a)（伯恩赛德引理）　置换群 A 的轨的数目 $N(A)$ 由下式给出：

$$N(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}j_1(\alpha)。$$

令 A 是一个阶等于 m，度等于 d 的置换群。循环指标 $Z(A)$ 是 d 个变量 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_d$ 的多项式，它由下式给出：

$$Z(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\prod_{k=1}^{d}a_k^{j_k(\alpha)}。\tag{15.2}$$

因为对于任何一个置换 α，数 $j_k=j_k(\alpha)$ 满足

$$1j_1+2j_2+\cdots+dj_d=d,$$

这些项就构成整数 d 的一个划分。用向量的记号

$$(\boldsymbol{j})=(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_d)$$

来记 α 是有好处的。我们要注意，这种表示划分的方法与第六章中所用的方法是不同的；例如，划分 $5=3+1+1$ 相应于向量

$$(\boldsymbol{j})=(2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)。$$

用到波立亚定理的经典计数问题都有相同的一般形式。令有一个给定的定义域 D，一个值域 R 和一个定义在 R 上的权函数 w。为了用一个特定的权函数来进行说明，令 w 对每一个 $r\in R$ 指定非负整数的一个有序对 $w(r)=(w_1(r),\ w_2(r))$*。我们要计数

* 此处 $w_1(r)$ 和 $w_2(r)$ 都是定义在 R 上取值为非负整数的函数。原书记作 $(w_1r,\ w_2r)$，为明确表示函数关系起见，以下均对 r 加上圆括号。——译注

的对象现在看作是由 D 到 R 的函数。为了把问题提完，我们还要约定，什么时候 R^D 中的两个函数作为相同的。这可以用规定一个作用在 D 上的群 A 来实现，当两个函数在 E^A 的同一个轨中时我们就把它们看作是等价的；其中 E 是度等于 $|R|$ 的单位元素群*。

这里我们稍为离开一下正题，用"项链问题"来说明这些概念。考虑有 4 颗珠的项链，珠分红和蓝两种颜色。这样的两个项链，如果可以不改变珠的颜色而"弄成一样"，就认为它们是相同的。这里，定义域 D 是放珠的位置的集，值域 R 是集{红珠，蓝珠}，函数 $f\in R^D$ 是对每一个位置指定一颗珠，也就是说给出一个项链。在这个例中，A 是二面体群 D_4，而权函数 w 可以取为 w(红珠) $=(1,\ 0)$，w(蓝珠) $=(0,\ 1)$。

按照波立亚原来的说法，定义域的元素叫位置，值域的元素叫图形，函数叫构形，置换群叫构形群。我们对每一个 $f\in R^D$ 指定一个权 $W(f)$，它用下列方程定义：

$$W(f)=\prod_{d\in D}x^{w_1(f(d))}y^{w_2(f(d))}。\tag{15.3}$$

容易看出，在 E^A 的作用下，R^D 的一个给定的轨中每一个函数有相同的权，所以每一个轨的权可以定义为其中任何一个函数的权。

假定在 R 中权等于 $(m,\ n)$ 的图形有 c_{mn} 个，R^D 中权等于 $x^m y^n$ 的轨（构形的等价类）有 C_{mn} 个。图形计数级数

$$c(x,\ y)=\sum c_{mn}x^m y^n \tag{15.4}$$

是按照权来计数 R 的元素的，而构形计数级数

$$C(x,\ y)=\sum C_{mn}x^m y^n \tag{15.5}$$

是函数的等价类的生成函数**。波立亚定理[P5]用 $c(x,\ y)$ 来表达

---

* 这就是说，两个函数 $f_1,\ f_2\in R^D$ 是等价的当且仅当存在一个置换 $\alpha\in A$，使对一切 $d\in D$，

$$f_1(d)=f_2(\alpha d)。$$

——译注

** 计数问题中的生成函数（有时称为通常生成函数）是 r 个变量 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r$ 的一个形式的无穷幂级数，其中项 $x_1^{d_1}\cdots x_r^{d_r}$ 的系数是由参数组 $(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_r)$ 限定的计数对象的数目。由(15.3)，(15.5)右边可以看作是 R^D 在置换群 E^A 作用下所有的轨的权的和，即(15.1)左边的和 $\sum w(\theta_i)$。——译注

$C(x, y)$。

若在(15.2)中，我们记 $Z(A)=Z(A;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_d)$，则对于任何一个函数 $h(x,\ y)$，我们定义

$$Z(A,\ h(x,\ y))=Z(A;\ h(x,\ y),\ h(x^2,\ y^2),\ \cdots,\ h(x^d,\ y^d))。\tag{15.6}$$

定理 15.4（波立亚计数定理）　构形计数级数可以由将图形计数级数代入到构形群的循环指标中去而得到，即

$$C(x,\ y)=Z(A,\ c(x,\ y))。\tag{15.7}$$

[证明]　令 α 是 A 中的一个置换，又令 $\tilde{\alpha}$ 为幂群 E^A 中相应的置换。先假定 f 是在 $\tilde{\alpha}$ 下不动的一个构形，而 ζ 是 α 的不相交循环分解中的一个长度等于 k 的循环。则对 ζ 的表示式中的每一个元素 b，$f(b)=f(\zeta b)$，所以，被 ζ 置换的所有元素在 f 下一定有同一个象。反过来，如果置换 α 的每一个循环中的元素在一个构形 f 下都有同一个象，则 $\tilde{\alpha}$ 使 f 不动。于是，只要对 α 的每一个循环 ζ，在 R 中独立地选择一个元素 r，且对被 ζ 所置换的所有的 b，置 $f(b)=r$，就可以得到所有的在 $\tilde{\alpha}$ 下不动的构形。于是，若权 $w(r)$ 等于 $(m,\ n)$，其中，$m=w_1(r)$，$n=w_2(r)$，而 ζ 的长度等于 k，则循环 ζ 就使和式 $\sum\limits_{f=\tilde{\alpha}f} W(f)$ 有一个因式 $\sum\limits_{r\in R}(x^m y^n)^k$*。于是，因为

$$\sum_{r\in R}(x^m y^n)^k=c(x^k,\ y^k),$$

对于 A 中的每个 α，我们就有

* 设 α 有 $t+1$ 个循环 $\zeta_0=\zeta,\ \zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_t$。$r_0=r,\ r_1,\ \cdots,\ r_t$ 是 R 的 $t+1$ 个独立选出的元素。定义

$$f_{r_0,\ r_1,\ \cdots,\ r_t}(d)=r_i,\quad 当\ d\in\zeta_i。$$

由上文所说，$\{f;\ f=\tilde{\alpha}f\}=\{f_{r_0,\ r_1,\ \cdots,\ r_t}(d);\ r_0,\ \cdots,\ r_t\in R\}$。因此，记

$$W_i(f,\ r_i)=\prod_{d\in\zeta_i} x^{w_1(f(d))}y^{w_2(f(d))}\big|_{f(d)=r_i}=(x^{w_1(r_i)}y^{w_2(r_i)})^{|\zeta_i|},$$

即得:

$$\sum_{f=\tilde{\alpha}f}W(f)=\sum_{r_1,\cdots,r_t\in R}\sum_{r\in R}W(f)=\sum_{r_1,\cdots,r_t\in R}\left[\prod_{i=1}^{t}W_i(f,\ r_i)\sum_{r\in R}(x^{w_1(r)}y^{w_2(r)})^{|\zeta|}\right]$$

$$=\Big(\sum_{r\in R}(x^m y^n)^k\Big)\Big(\sum_{r_1,\cdots,r_t\in R}\prod_{i=1}^{t}W_i(f,\ r_i)\Big)\qquad\text{——译注}$$

$$\sum_{f=\tilde{\alpha}f} W(f)=\prod_{k=1}^{s} c(x^k,\ y^k)^{j_k(\alpha)}。$$

将这个方程的两边对 A 中所有的置换 α（或等价地，对 E^A 中所有的 $\tilde{\alpha}$）求和，又将两边除以 $|A|=|E^A|$，我们得到

$$\frac{1}{|E^A|}\sum_{\tilde{\alpha}\in E^A}\sum_{f\in\tilde{\alpha}f} W(f)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\prod_{k=1}^{s} c(x^k,\ y^k)^{j_k(\alpha)}。\quad (15.8)$$

这个方程的右边是 $Z(A,\ c(x,\ y))$。为了看出它的左边是 $C(x,\ y)$，我们应用在定理 15.3 中给出的伯恩赛德引理的解释。先注意到，对幂群 E^A，轨的权的和由下式给出：

$$\sum_{i=1}^{n} w(\theta_i)=\sum C_{mn}x^m y^n=C(x,\ y)。\quad (15.9)$$

但由(15.1)立即得到，(15.9)和(15.8)的左边是相等的。所以，$Z(A,\ c(x,\ y))=C(x,\ y)$。证毕。

回到上面提到过的 4 个珠的项链的问题，我们注意二面体群 D_4 的循环指标为

$$Z(D_4)=\frac{1}{8}(a_1^4+2a_1^2a_2+3a_2^2+2a_4),\quad (15.10)$$

图形计数级数为 $c(x,\ y)=x^1y^0+x^0y^1=x+y$。按(15.6)，将 $x+y$ 代入(15.10)，我们得到，

$$\begin{aligned}Z(D_4,\ x+y)&=\frac{1}{8}\{(x+y)^4+2(x+y)^2(x^2+y^2)\\&\quad+3(x^2+y^2)^2+2(x^4+y^4)\}\\&=x^4+x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4。\end{aligned}\quad (15.11)$$

在(15.11)中 x^my^n 的系数是有 4 颗珠，其中 m 颗为红色，n 颗为蓝色的不同的项链的数目。图 15.3 中给出了 6 种不同的项链。

顺便提到，也可以用 $1+x$ 来代替 $x+y$ 作为图形计数级数来计数项链。在这种情形下，一颗红珠的权等于 1，而一颗蓝珠的权等于 0，于是在 $Z(D_4,\ 1+x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$ 中，x^m 的系数是有 m 颗红珠，从而有 $4-m$ 颗蓝珠的项链的数目；比较(15.11)。如我们将在下一节看到，图形计数级数 $1+x$ 在计数问题中起重要的作用，因为 x^0 是指一个图形不存在，而 x^1 是指它存在，波立亚

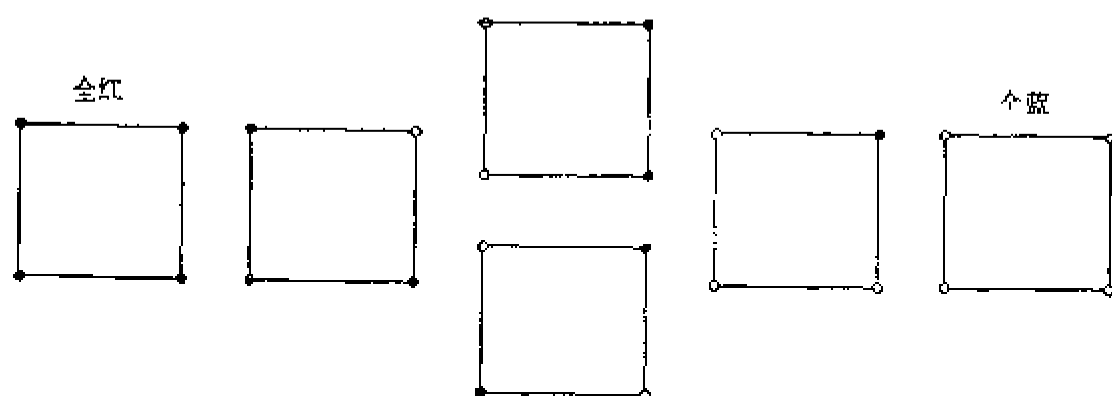


图　15.3

定理的下列推论[H31]说明了这个理由。一个集 X 的一个 n-子集是恰有 n 个元素的一个子集。

系 15.4(a)　若 A 是作用在 X 上的一个置换群，则由 A 导出的 X 的 n-子集的轨的数目是 $Z(A, 1+x)$ 中 x^n 的系数。

在波立亚计数定理的各种应用中，某些置换群经常出现。现在给出列在表 14.2 中的五种重要的置换群的循环指标的公式。在 (15.12) 和 (15.13) 中，取和是对 p 的所有划分 $(\boldsymbol{j})$ 取的。在 (15.14) 中，$\phi(k)$ 是"欧拉的 ϕ-函数"，即小于 k 且与 k 互素的正整数的数目，且 $\phi(1)=1$。

$$Z(S_p)=\frac{1}{p!}\sum_{(j)}\frac{p!}{\prod_{k=1}^{p}k^{j_k}j_k!}a_1^{j_1}a_2^{j_2}\cdots a_p^{j_p}。\tag{15.12}$$

$$Z(A_p)=\frac{1}{p!}\sum_{(j)}\frac{p![1+(-1)^{j_2+j_4+\cdots}]}{\prod_{k=1}^{p}k^{j_k}j_k!}a_1^{j_1}a_2^{j_2}\cdots a_p^{j_p}。\tag{15.13}$$

$$Z(C_p)=\frac{1}{p}\sum_{k|p}\phi(k)a_k^{p/k\,*}。\tag{15.14}$$

$$Z(D_p)=\frac{1}{2}Z(C_p)+\begin{cases}\frac{1}{2}a_1a_2^{(p-1)/2},\ p\ 为奇数,\\ \frac{1}{4}(a_2^{p/2}+a_1^2a_2^{(p-2)/2}),\ p\ 为偶数。\end{cases}\tag{15.15}$$

$$Z(E_p)=a_1^p。\tag{15.16}$$

有几个非常有用的公式，它们用 $Z(A)$ 和 $Z(B)$ 来给出 A 和 B

* $\sum_{k|p}$ 是指对所有可除尽 p 的正整数 k 求和。——译注

的二元运算：和、积、合成和幂群的循环指标。这些发表在[H31]中的公式在方程(15.17)～(15.22)中给出。我们用 $Z(A)[Z(B)]$ 来表示一个多项式，这个多项式是将 $Z(A)$ 中的每一个变量 a_k 都用一个多项式来代而得到的，用来代替 a_k 的多项式由将 $Z(B)$ 的每一个变量的下标乘以 k 得到。

$$Z(A+B)=Z(A)Z(B), \tag{15.17}$$

$$Z(A\times B)=\frac{1}{|A|}\frac{1}{|B|}\sum_{(\alpha,\beta)}\prod_{r,s=1}^{d,e}a_{m(r,s)}^{d(r,s)j_r(\alpha)j_s(\beta)},^{*} \tag{15.18}$$

其中 $d(r, s)$ 和 $m(r, s)$ 分别是最大公约数和最小公倍数。

$$Z(A[B])=Z(A)[Z(B)], \tag{15.19}$$

$$Z(B^A)=\frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{(\alpha;\beta)}a_k^{j_k(\alpha;\beta)}, \tag{15.20}$$

其中 $(\alpha;\beta)=\beta^\alpha$，及

$$j_1(\alpha;\ \beta)=\prod_{k=1}^{d}\Big(\sum_{s|k}s\,j_s(\beta)\Big)^{j_k(\alpha)}, \tag{15.21}$$

而对于 $k>1$，

$$j_k(\alpha;\ \beta)=\frac{1}{k}\sum_{s|k}\mu\left(\frac{k}{s}\right)j_1(\alpha^s;\ \beta^s), \tag{15.22}$$

其中 μ 是熟知的数论的麦比乌斯函数**。

3. 图的计数

我们现在来叙述怎样得到计数有给定的点数 p 的图的多项式 $g_p(x)$。令 g_{pq} 为 (p, q) 图的数目，又令

$$g_p(x)=\sum_q g_{pq}x^q。 \tag{15.23}$$

细察所有的有4个点的图，容易验证

$$g_4=1+x+2x^2+3x^3+2x^4+x^5+x^6。 \tag{15.24}$$

令 $V=\{1, 2, \cdots, p\}$，又令 $R=\{0, 1\}$。我们用 $D=V^{(2)}$ 记 V

---

* $\prod_{r,s=1}^{d,e}=\prod_{r=1}^{d}\prod_{s=1}^{e}$，其中 d 和 e 分别是置换群 A 和 B 的度，下面(15.21)中的 d 是 A 的度。

** 它的定义为：n 为不同的素数 $p_1, \cdots, p_m$ 的积时 $\mu(n)=(-1)^m$，否则 $\mu(n)=0$。

的不同的元素的子集 $\{i, j\}$ 的集，即 V 的 2-子集的集。则由 D 到 R 中的每个函数 f 代表一个图，这个图的 p 个点是 V 的元素，其中，当 $f\{i, j\}=1$ 时，i 邻接于 j。即按照有或没有联结 i 和 j 的线，$\{i, j\}$ 在 f 下的象为 1 或 0。R 上的权函数 w 由 $w(0)=0$ 和 $w(1)=1$ 定义，所以它是恒等函数。从而，图形计数级数是 $c(x)=1+x$。将(15.3)限制为一个变量，函数 f 的权由下式给出：

$$W(f)=x^{\Sigma w(f(i,j))},^{*} \tag{15.25}$$

其中，求和是对于 $V^{(2)}$ 中所有的对 $\{i, j\}$ 取的。于是函数 f 的权** 是相应于 f 的图中线的数目。

今令 E_2 是作用在 R 上的单位元素群，又令 S_p 作用在 V 上。我们用 $S_p^{(2)}$ 来记对群，它作用在 $V^{(2)}$ 上，它的置换由 S_p 导出；也就是说，对 S_p 中每一个置换 α，在 $S_p^{(2)}$ 中有一个置换 α'，使

$$\alpha'\{i, j\}=\{\alpha i, \alpha j\}。$$

将波立亚定理应用到构形群 $S_p^{(2)}$ 上，我们得到下列也属于波立亚的结果；见[H11]。

定理 15.5　有 p 个点的图的计数多项式为

$$g_p(x)=Z(S_p^{(2)}, 1+x), \tag{15.26}$$

其中，

$$Z(S_p^{(2)})=\frac{1}{p!}\sum_{(j)}\frac{p!}{\prod_{k=1}^{p} j_k!\,k^{j_k}}\prod_{k=1}^{[p/2]}\left(a_k a_{2k}^{k-1}\right)^{j_{2k}}\cdot$$

$$\prod_{k=0}^{[(p-1)/2]} a_{2k+1}^{k j_{2k+1}}\prod_{k=1}^{[p/2]} a_k^{k\binom{j_k}{2}}\prod_{1\leqslant r<s\leqslant p-1} a_{m(r,s)}^{d(r,s)j_r j_s}。\tag{15.27}$$ ***

[H31, p. 38]中给出了(15.27)的一个推论。在附录 I 中，列出了 (p, q) 图的数目直到 $p=9$ 的表。

计数有根图和连通图的类似公式也已经得到了。这个方法经过修正以后还计数出了图的各种族****，其中有有向图，伪图和多

---

* 原书印误。——译注

** 在只有一个变量的情形，本书也把 $W(f)$ 中 x 的幂次称为 f 的权。——译注

*** 原书印误。$d(r, s)$，$m(r, s)$ 的意义见(15.18)。——译注

**** 按本书的定义，下列三个族都不是"图"，因此称它们为图的各种族不妥。——译注

重图。我们给出其中的几个计数公式，并且说明一下这些公式是如何从上一个定理直接推出的。首先，要计数有根图，在构成对群之前一定要将根点固定住，而将其余$p-1$个点看作是可以交换的。

系 15.5(a)　有p个点的有根图的计数多项式为

$$r_p(x)=Z\left((S_1+S_{p-1})^{(2)},\ 1+x\right)。\tag{15.28}$$

当联结每一对点至多有两条线时，我们只要将图的图形计数级数用$1+x+x^2$来代。

系 15.5(b)　至多有两条线联结每一对点的多重图的计数多项式为

$$g''_p(x)=Z(S_p^{(2)},\ 1+x+x^2)。\tag{15.29}$$

对任意的多重图，图形计数级数成为

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}。$$

系 15.5(c)　有p个点的多重图的计数多项式为

$$m_p(x)=Z\left(S_p^{(2)},\ \frac{1}{1-x}\right)。\tag{15.30}$$

有向图的计数也已经完成了[H11]，如同对于图那样，我们找到了适当的构形群的循环指标的一个公式，再应用了波立亚定理。对于有向图，我们要应用约化有序对群$S_p^{[2]}$。如同前面一样，S_p作用在$V=\{1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$上。按定义，$S_p^{[2]}$作用在$V^{[2]}$上，$V^{[2]}$是V的不同的元素的有序对，$S_p^{[2]}$由S_p导出；即对于S_p中的每一个置换α，在$S_p^{[2]}$中导出一个置换α'，使得对$V^{[2]}$中的$(i,\ j)$，$\alpha'(i,\ j)=(\alpha i,\ \alpha j)$。应用波立亚定理于$S_p^{[2]}$的循环指标，得到多项式$d_p(x)$，其中$x^q$的系数是有$q$条有向线的有向图的数目。

定理 15.6　有p个点的有向图的计数多项式为

$$d_p(x)=Z(S_p^{[2]},\ 1+x),\tag{15.31}$$

其中，

$$Z(S_p^{[2]})=\frac{1}{p!}\sum_{(j)}\frac{p!}{\prod_{k=1}^{p}j_k!\,k^{j_k}}\prod_{k=1}^{p}a_k^{(k-1)j_k+2k\binom{j_k}{2}}\prod_{1\le r<s\le p-1}a_{m(r,s)}^{2j_rj_sd(r,s)}。\tag{15.32}$$

当然,这个定理也有类似于定理 15.5 的各个系。

附录 II 中有一个表，其中列出了有 $p\leqslant 8$ 个点的有向图的数目。

虽然计数有根树和树远比计数图要早，但是因为图的图形计数级数 $1+x$ 简单,所以上面先讲图的计数。我们将要看到，为了计数树,最有用的图形计数级数是有根树本身的生成函数。

4. 树的计数

要求树的数目，必须从计数有根树开始。一个有根树中有一个点从其他各点中区别出来,这个点叫做它的根。令 T_p 是有 p 个点的有根树的数目。在图 15.4 中,我们将每一个树的根画成与其他各点不同的样子。我们看到, $T_4=4$。有根树的计数级数记以

$$T(x)=\sum_{p=1}^{\infty} T_p x^p。\qquad (15.33)$$

类似地,对于无根树我们定义 t_p 和 $t(x)$。

计数有根树的一个递推形式的表达式由凯莱[C2]得到。

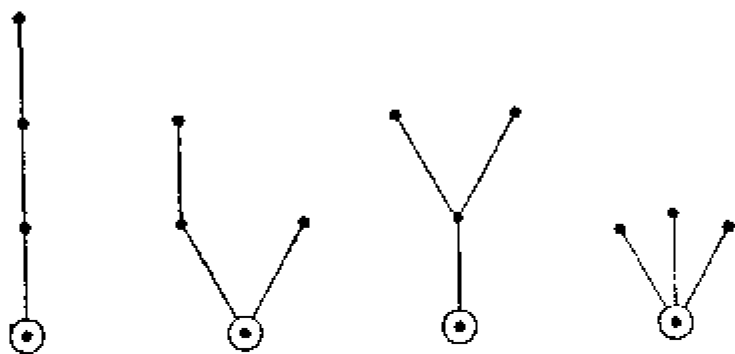


图 15.4　有 4 个点的有根树。

定理 15.7　有根树的计数级数由下式给出:

$$T(x)=x\prod_{r=1}^{\infty}(1-x^r)^{-T_r}。\qquad (15.34)$$

可以将(15.34)变换成用 $T(x)$ 自己来表达它自己的形式，只要在两边取对数，然后适当运用幂级数。这就导出(15.35)，这个结果是波立亚[P5]利用他的计数定理首先得到的。

定理 15.8　有根树的计数级数满足函数方程

$$T(x)=x\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}T(x^r)。\tag{15.35}$$

［证明］　令$T^{(n)}(x)$是根的度等于n的有根树的生成函数，故

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T^{(n)}(x)。\tag{15.36}$$

其中例如$T^{(0)}(x)=x$就数出了有根平凡图，而$T^{(1)}(x)=xT(x)$就数出了植树(根在一个端点的有根树)。一般地说，根的度等于n的一个有根树可以看作一个构形，它的各个图形是移去了它的根以后所得到的n个有根树。图15.5在$n=3$的情形说明了这种情况。

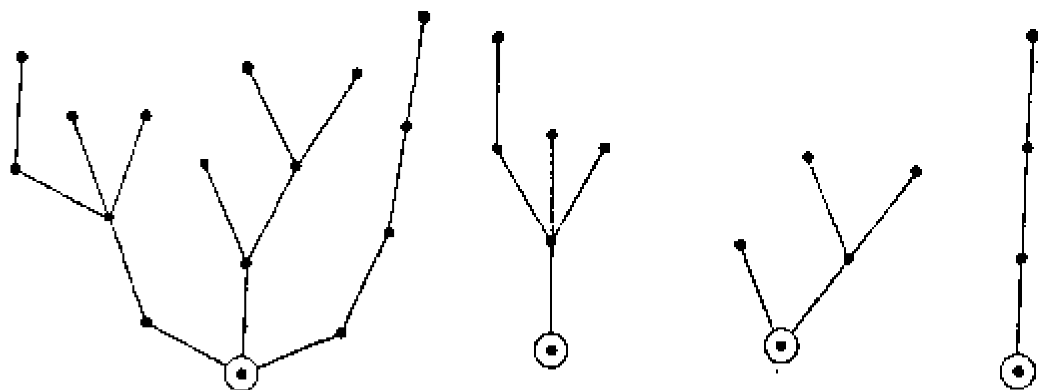


图15.5　一个给定的有根树T和它的组分有根树。

因为这n个有根树可以互相交换而不改变给定的有根树的同构类，所以图形计数级数是$T(x)$，构形群是S_n，这就给出

$$T^{(n)}(x)=xZ(S_n,\ T(x))。\tag{15.37}$$

乘上的因子x对应于移去了的那个给定的树的根，因为一个树的权是它的点的数目。

现在我们很幸运地可以求助于一个有名的而且容易导出的恒等式(其中$Z(S_0)$定义为1)*：

$$\sum_{n=0}^{\infty}Z(S_n,\ h(x))=\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}h(x^r)。\tag{15.38}$$

联合最后这三个方程，我们就得到(15.35)。

凯莱[C5]首先导出了用T_n来表示t_p的表达式，其中$n<p$。

* 这个式子的一种最简单的证法是直接比较两边同类项的系数。——译注

他的做法是分别计数有一个中心点和二个中心点的树的数目来得到这个公式。波立亚[P5]分别考虑了有一个或二个形心点的树得出了 t_p 的一个等价的表达式。奥特(Otter)[O8]完全应用生成函数，用有根树的数目来表达树的数目，得到了最简洁的公式。实际上，如[H12]所证明，奥特的方程(15.41)可以直接从凯莱或波立亚对 t_p 的表达式来导出，只要反复应用下列规则："当你见到两个相邻的连加号时就交换它们的次序"。奥特是从下述结果导出(15.41)的，这个结果也有它的独立的意义；它有时被称为"树的不相似性特征方程"。联结两个相似点的线称为对称线。

定理 15.9 对于任何一个树 T，令 p^* 和 q^* 分别是点和线的相似类的数目，又令 s 是对称线的数目，则 $s=0$ 或 1，同时有

$$p^*-(q^*-s)=1。\tag{15.39}$$

证明概要 当 T 有一个中心点或两个不相似的中心点时，没有对称线，所以 $s=0$。这种情形下 T 有一个子树，它含有 T 中点的每一个相似类中正好一个点和线的每一个相似类中正好一条线，因为这个子树有 p^* 个点和 q^* 条线，我们有 $p^*-q^*=1$。

另一种可能情形是 T 有两个相似的中心点，从而 $s=1$。这种情形下，它有一个子树，含有 T 中的点的每一个相似类中正好一个点和除了对称线外的各条线的每一个相似类中的正好一条线，于是这个子树有 p^* 个点和 q^*-1 条线，所以 $p^*-(q^*-1)=1$。于是在两种情形下(15.39)都成立。

我们还需要波立亚[P5]的一个特殊的定理，它是用来计数1-1函数的。为方便起见，我们用 $Z(A_n-S_n)$ 来作为 $Z(A_n)-Z(S_n)$ 的简写。

定理 15.10 从一个有 n 个可交换的元素的集到一个具有图形计数级数 $c(x)$ 的集中的 1-1 函数的构形计数级数 $C(x)$，可以将 $c(x)$ 代入 $Z(A_n-S_n)$ 中得到：

$$C(x)=Z(A_n-S_n,\ c(x))。\tag{15.40}$$

虽然我们将只在 $n=2$ 的情形下使用(15.40)，但是在其他情形下，它也提供一种有用的计数办法[HP20]。我们还可以利用它

为计数树的奥特公式提出一个非常简明的证明。

定理15.11　用有根树的计数级数来表示的树的计数级数由下列方程给出：

$$t(x)=T(x)-\frac{1}{2}[T^2(x)-T(x^2)]。\qquad(15.41)$$

［证明］　对 $i=1$ 到 t_n，令 p_i^*，q_i^* 和 s_i 分别是有 n 个点的第 i 种树中，点的相似类、线的相似类和对称线的数目。因为对于每一个 i，按(15.39)，$1=p_i^*-(q_i^*-s_i)$。我们对 i 求和得到

$$t_n=T_n-\sum_i(q_i^*-s_i)。\qquad(15.42)$$

而且，$\sum(q_i^*-s_i)$是以一条不是对称线的线作为根的有 n 个点的树的数目。考虑一个树 T，又取 T 的任何一条不是对称线的线 y。则 $T-y$ 可以看作二个有根树，它们一定是不同构的。于是每一个树的每一条非对称线相应于不同的有根树的一个无序对。计数这些树对，等价于计数从有二个可交换的元素的一个集到有根树的集中的1-1函数。于是我们应用定理15.10，用 $T(x)$为图形计数级数，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{t_n}(q_i^*-s_i)x^n\right]=Z(A_2-S_2,\ T(x))。\qquad(15.43)$$

因为

$$Z(A_2)=a_1^2,\ Z(S_2)=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2),$$

我们有

$$Z(A_2-S_2,\ T(x))=\frac{1}{2}[T^2(x)-T(x^2)]。\qquad(15.44)$$

定理中的公式现在由(15.42)～(15.44)得到。

利用(15.35)和(15.41)，直到 $p=12$，我们得到了有根树和无根树的确切数目。

$$T(x)=x+x^2+2x^3+4x^4+9x^5+20x^6+48x^7+115x^8$$
$$+286x^9+719x^{10}+1842x^{11}+4766x^{12}+\cdots,\qquad(15.45)$$
$$t(x)=x+x^2+x^3+2x^4+3x^5+6x^6+11x^7+23x^8$$
$$+47x^9+106x^{10}+235x^{11}+551x^{12}+\cdots。\qquad(15.46)$$

(15.46)中前 10 项所计数出的树的图解可在附录 III 中找到，那里还有一个表列出了 $p\leqslant 26$ 时的 t_p 和 T_p。

用来导出定理 15.11 的方法可以推广来计数各种类型的树。我们用二种类型的树来说明这个方法，这二种树是同胚不可约树和幺树[HP20]；其余的类型可以类似地处理，例如着色树[R14]，有给定的划分的树[HP20]等等。令 $h(x)$、$H(x)$和 $\bar{H}(x)$分别是同胚不可约树、有根树和植树的计数级数。

定理 5.12　同胚不可约树由下列三个方程来计数，

$$H(x)=\frac{x^2}{1+x}\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\bar{H}(x^r)}{rx^r}。\tag{15.47}$$

$$H(x)=\frac{1+x}{x}\bar{H}(x)-\frac{1}{2x}[\bar{H}^2(x)-\bar{H}(x^2)]。\tag{15.48}$$

$$h(x)=H(x)-\frac{1}{x^2}[\bar{H}^2(x)-\bar{H}(x^2)]。\tag{15.49}$$

直到有 12 个点的同胚不可约树的数目可以求得为：

$$\begin{aligned}h(x)=&x+x^2+x^4+x^5+2x^6+2x^7+4x^8\\&+5x^9+10x^{10}+14x^{11}+26x^{12}+\cdots\end{aligned}\tag{15.50}$$

令 $u(x)$和 $U(x)$ 是幺树和幺有根树的计数级数，这些树的自同构群是单位元素群。

定理 15.13　幺树由下列方程来计数：

$$U(x)=x\exp\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{U(x^n)}{n}。\tag{15.51}$$

$$u(x)=U(x)-\frac{1}{2}[U^2(x)+U(x^2)]。\tag{15.52}$$

直到有 12 个点的幺树的数目由下式给出：

$$u(x)=x+x^7+x^8+3x^9+6x^{10}+15x^{11}+29x^{12}+\cdots\tag{15.53}$$

5. 幂群计数定理

有一类计数问题可以用一个幂群作为构形群来解。考虑作用

在 R^D 上的幂群 B^A。构形(由 B^A 决定的函数的等价类)的数目，如[HP8]所证明，可以从波立亚定理导出；但是，它还以另外一种形式由德布鲁因 (de Bruijn)[B18]和[B19]所求得的。很容易修改一下下一个定理中给出的方程(15.54)就可以用它来对于函数的权计数函数。

定理 15.14(幂群计数定理) R^D 中由幂群 B^A 所决定的函数的等价类的数目等于

$$N(B^A)=\frac{1}{|B|}\sum_{\beta\in B}Z(A;m_1(\beta),\ m_2(\beta),\ \cdots,\ m_d(\beta)),\quad(15.54)$$

其中，

$$m_k(\beta)=\sum_{s|k}sj_s(\beta)。\quad(15.55)$$

我们仍然用图 15.3 中所给的项链问题来加以说明，但是现在我们允许珠的两种颜色 a、b(例如红色和蓝色)是可以交换的。显然，有两种可以交换的颜色的 4 颗珠的项链的数目是 $N(S_2^{D_4})$，即幂群 $S_2^{D_4}$ 的轨的数目。对于 S_2 的恒等置换$(a)(b)$，由(15.55)式得到对于所有的 k，

$$m_k((a)(b))=2。$$

对于 S_2 中的对换(ab)，$m_k((ab))$等于 0 或 2，这按 k 是奇数或偶数而定。应用(15.54)，我们见到，有可以交换的颜色的项链的数目等于

$$\frac{1}{2}[Z(D_4;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)+Z(D_4;\ 0,\ 2,\ 0,\ 2)]。$$

用公式(15.10)中的式子来代 $Z(D_4)$，我们得到，这种项链的数目等于 4。注意到如果红色和蓝色是可以交换的，则图 15.3 中最后两种项链等价于最前的两种，就可以验证上述的计算。

图 2.13 中已经给出了有 4 个点和 5 个点的自补图。里德[R5]对于有 p 个点的自补图的数目 s_p 的结果很容易从幂群计数定理得出。为此，我们定义有 p 个点的图的一个新的等价关系～，即若 $G_1\cong G_2$ 或 $G_1\cong\bar{G}_2$，称 $G_1\sim G_2$。令 c_p 是有 p 个点的图在这种等价关系下的等价类的数目。因为我们处理的是有 p 个点的图，

我们取 $A=S_p^{(2)}$，它作用在 $D^{(2)}$ 上。因为一个图与它的补图是等价的，我们令 $B=S_2$，它作用在 $R=\{0, 1\}$ 上。则在幂群 B^A 下由 $D^{(2)}$ 到 R 中的两个函数 f_1 和 f_2，当它们代表同一个图或其中一个代表另外一个的补图时是等价的。我们已经看到过将(15.55)应用到 S_2 的置换上得到的结果，从而我们有

$$c_p=\frac{1}{2}[Z(S_p^{(2)};\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots)$$

$$+Z(S_p^{(2)};\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \cdots)]。\qquad(15.56)$$

但因为 $s_p=2c_p-g_p$，我们就有下列由里德得到的公式。

定理 15.15　有 p 个点的自补图的数目 s_p 等于

$$s_p=Z(S_p^{(2)};\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \cdots)。\qquad(15.57)$$

哈里森(Harrison)[H34]，哈拉里和帕尔默[HP12]利用幂群计数定理数出了有限自动机的数目。这个问题的群是两个幂群的积的子群。

6. 已解决的和未解决的图的计数问题

至今在文献中已经有 3 张没有解决的图的计数问题的表，这就是[H24]，[H30] 和最近的[H32, p, 30]。经常有必要将这些表更新。由于新的问题产生和老的问题被解决，没有解决的问题的数目保持为 27 个。值得注意的是，所有这些计数问题都很快地被解决是极不可能的。因为在这些解中包含有足够的讯息来决定四色猜想的真实性，只要比较一下可平面图的数目和四色可平面图的数目就可以了。

表 15.1 提出了第四张没有解决的图的计数问题的表，并用它作为标题。当然，所有这些问题也可以对标定图提出，并且其中有几个在标定图的情形下已经解决了。了解这些问题还需要少数几个附加的定义。这些问题的每一个都要求数学家来决定以适当的参数限定的构形的数目。所需要的属于有向图范畴的定义可以在下一章中找到。

表 15.1 未解决的图的计数问题(IV)

范 畴	计 数
有向图	强有向图 单侧有向图 有源有向图 可迁有向图 自补且自逆的有向图
可行遍性	哈密顿图 一个给定的图中的哈密顿圈 一个给定的图中的欧拉迹
拓扑的	单纯复形 k 色图 可平面的 k 色图 有根可平面图 有边根的平面地图
对称性	对称图 幺图 有给定的自同构群的图
应 用	一个标定 3-格的偶子图 有给定面积的一个标定 2-格的偶子图 一个给定的标定图的偶子图 一个 2-格的铺砌 兽图
其 他	线图 拉丁方 有给定的半径或直径的图 有给定的围长或周长的图 有给定的连通度的图 有给定的亏格，厚度，色数等等的图

关于表 15.1 中涉及的术语现说明如下。托特 [T15] 研究了一种有根的平面地图的计数，这个根选择得破坏了任何可能存在的对称性。一个有边根的平面地图由一个平面地图如下地得到：将任意一条边定向，然后指定与这条边关联的两个面之一为地图的

外部面。

一个 2-格是一个图，它的点是整数的有序对 (i, j)，其中 $i=0、1、\cdots、m$，$j=0、1、\cdots、n$；两个点当它们在笛卡儿平面上的距离等于 1 时邻接。一个 3-格类似地定义。图 G 的一个偶子图 H 是一个每个点的度是偶数的子图。于是，一个 2-格的每一个偶子图有确定的面积*，即含于它的圈内的正方形的数目*。

2-格的一个铺砌是指用给定数目的单个的单位正方形和由二个正方形拼成的骨牌形对格的方格的一个覆盖。当然可以提出更大的和更复杂的铺砌问题。

有三种胞腔生长问题，分别对三角形、正方形和六角形提出，这是仅有的三种可以覆盖平面的正多边形。一个兽图是一个含有给定的数目的三角形、正方形和正六角形的单连通构形，见[H32, pp. 33～38]。

我们在下面列出一张表，它罗列了已经解决的各种计数问题(不完全是难免的)，目的是希望尽量减少不必要的重复努力。表中所给出的参考文献都是刊有解答的论文；至于那些论文没有发表的项目，出于对作者名声的相信，这里注明了(最后完成的)作者名字。表 15.2 分为四个范畴：树、图、有向图和其他。

表 15.2 已解决的图的计数问题

树	
树	波立亚[P5]，奥特[O8]。
标定树	凯莱[C6]，穆恩[M15]。
有根树	波立亚[P5]。
有给定高度的有根树	赖尔顿[R16]。
无端标定树	哈拉里、莫肖维茨、赖尔顿[HMR1]。
平面树	哈拉里、普林斯、托特[HPT1]。
有给定划分的平面树	托特[T18]，哈拉里、托特[HT2]。
局部不可约树	哈拉里、普林斯[HP20]。
么树	哈拉里、普林斯[HP20]。

* 2-格按常规画在笛卡儿平面上。——译注

(续表)

树	
有给定划分的树	哈拉里、普林斯[HP20]。
有给定的群的树	普林斯[P8]。
有给定的直径的树	哈拉里、普林斯[HP20]。
有向树	哈拉里、普林斯[HP20]。
定向树	哈拉里、普林斯[HP20]。
指定符号的树	哈拉里、普林斯[HP20]。
有给定的强度的树	哈拉里、普林斯[HP20]。
有给定的型式的树	哈拉里、普林斯[HP20]。
块-割点树	哈拉里、普林斯[HP20]。
着色树	赖尔顿[R14]。
林	哈拉里、帕尔默[HP16]。

图	
图	波立亚[H11]，戴维斯(Davis)[D1]。
有根图	哈拉里[H11]。
线有根图	哈拉里[H31]。
以一条定向线为根的图	哈拉里、帕尔默[HP1]。
连通图	里德尔(Riddell)、乌伦伯克[RU1]，哈拉里[H11]。
多重图	哈拉里[H11]。
有给定的强度的图	哈拉里[H11]。
有给定的型式的图	哈拉里[H11]。
G 的生成子图和母图	哈拉里[H13]，[H14]，[H19]。
自补图	里德[R5]。
指定符号的图	哈拉里[H10]，哈拉里、帕尔默[HP3]。
单圈图	赖尔顿[R15, p. 147]。
欧拉图	(R. W. 鲁宾逊)。
有给定的划分的图	帕撒塞拉西(Parthasarathy)[P2]。
有给定的划分的伪图	里德[R3]。
迭置图	里德[R3]。
有可交换的颜色的迭置图	帕尔默、鲁宾逊[PR1]。
三次图	(R. W. 鲁宾逊)。
不可分图	(R. W. 鲁宾逊)。
2-色图	鲁宾逊[R19]。
可双色图	哈拉里、普林斯[HP21]、

（续表）

图	
有边根的三角剖分地图	托特[T14]。
仙人掌图	哈拉里、诺曼[HN2]，哈拉里、乌伦伯克[HU1]。
有给定的块的图	福特、诺曼、乌伦伯克[FNU1]。
块图	哈拉里、普林斯[HP22]。
有　向　图	
有向图	哈拉里[H11]，戴维斯[D1]。
弱连通有向图	哈拉里[H11]。
自补有向图	里德[R5]。
自逆有向图	哈拉里、帕尔默[HP9]。
定向图	哈拉里[H16]。
一个给定的图的定向	哈拉里、帕尔默[HP4]。
比赛图	戴维斯[D2]。
强比赛图	穆恩[M16]。
标定的可迁有向图	埃文斯(Evans)、哈拉里、林恩(Lynn)[EHL1]。
有给定的划分的有向图	哈拉里、帕尔默[HP7]。
所有的点的出度都等于2的有向图	(C. P. 劳斯(Lawes))。
无圈有向图	(R. W. 鲁宾逊)。
函数有向图	哈拉里[H23]、里德[R4]。
一个给定的有向图中的欧拉迹	德布鲁因、埃伦费斯特(Ehrenfest)[BE1]，史密斯、托特[ST1]。
其　　他	
自动机	哈里森[H34]，哈拉里、帕尔默[HP12]。
项链问题	哈拉里[H31]。
各种代数	哈里森[H35]。
布尔函数	波立亚[P5]，斯莱皮恩(Slepian)[S14]。
标定的序列-平行网络	卡利兹(Carlitz)、赖尔顿[CR1]。
周期序列	吉尔伯特(Gilbert)、赖尔顿[GR1]。
无向的单纯复形	哈拉里、帕尔默[HP17]，拜内克、穆恩[BM1]，拜内克、皮珀特(Pippert)[BP1]。

习题

15.1　下列各图各有几种标定办法:

(a) $\overline{K}_3+K_2$,　(b) $K_3\times K_2$,　(c) $K_{1,2}[K_2]$?

15.2　写出下列各个群的循环指标的表达式:

$$S_3+S_2,\quad S_3\times S_2,\quad S_3[S_2],\quad S_3^{S_2}\ \text{和}\ S_2^{S_3}。$$

15.3　有一个整数 k, 使得对于所有的 $n\leqslant k$, $Z(C_n, 2)=Z(D_n, 2)$成立,而当 $n>k$ 时不成立。求 k。

15.4　分 n 为至多 m 个部分的划分的数目是 $Z\left(S_m, \dfrac{1}{1-x}\right)$ 中 x^n 的系数。

15.5　计算 $Z(S_5^{(2)})$和 $g_5(x)$。用附录 I 验证这个结果。

15.6　求单圈图的计数级数。　　(赖尔顿[R15, p. 147])

15.7　令 $g(x, y)=\sum_{p=1}^{\infty} g_p(x)y^p$ 是图的生成函数, 又令$c(x, y)$是连通图的生成函数。则

$$g(x, y)=\exp \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\, c(x^r, y^r)。$$

(注意与方程(15.38)的类似性。)

15.8　求有 p 个点的下列树的数目:

(a) 标定的植树,　(b) 标定的有根树。

15.9　令 G 是一个标定图,它由 K_p 除去 r 条独立的线得到。G 的生成树的数目等于$(p-2)^r p^{p-2-r}$。　　(温伯格[W7])

15.10　有根树的数目满足不等式 $T_{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n} T_i T_{n-i+1}$。于是可得

$$T_n\leqslant\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}。\qquad\text{(奥特[O8])}$$

15.11　由方程 $R_n^{(i)}=R_{n-1}^{(i)}+T_{n+1-i}$ 定义数 $R_n^{(i)}$。则有根树的数目可以用下式求出,

$$nT_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} iT_i R_n^{(i)}。\qquad\text{(奥特[O8])}$$

15.12 用下列二种方法求 $p=8$ 和 9 时自补图的数目 s_p：利用公式(15.57)及将它们构造出来。

15.13 导出自补有向图的计数公式。 (里德[R5])

15.14 令 s_p 和 $\vec{s}_p$ 分别是自补图和自补有向图的数目，则 $s_{4n}=\vec{s}_{2n}$。 (里德[R5])

15.15 对于任何一个置换群 A，它的循环指标 $Z(A)$ 如在(15.2)中所给出，A 的轨的数目是

$$N(A)=\frac{\partial}{\partial a_1}Z(A)\Big|_{\text{所有}a_i=1}。$$

于是，在一个给定的图 G（它的置换群 $\Gamma(G)$ 的循环指标中的变量是 y_i）中点的相似类的数目等于

$$p^*=\frac{\partial}{\partial y_1}Z(\Gamma(G))\Big|_{\text{所有}y_i=1}。$$

15.16 设 G 是一个连通图，其中块的相似类有 n 个。若 p^* 是 G 的不相似的点的数目，而 p_k^* 是第 k 个相似类的块中不相似点的数目，则

$$p^*-1=\sum_{k=1}^{n}(p_k^*-1)。$$

将定理 15.9 作为这个命题的一个系来证明。

(哈拉里和诺曼[HN3])

第十六章 有 向 图

我射箭向远空，
可不知道它落地在何方。
——H. W. 朗费罗

有向图的理论非常多，以致可以为它写一整本书*。在这一章中，我们将主要强调有向图的那些与图不同的性质。所以，我们从讨论三种连通性开始：强的、单侧的和弱的。在提出了方向对偶原则以后，我们将研究与有向图有关的矩阵和类似于图的矩阵-树定理的一个定理。我们用一个关于比赛图的简短描述来作为结束。

1. 有向图和连通性

我们已经在图 2.4 中看到过所有的有 3 个点和 3 条弧的有向图。为了完备起见，我们从定义讲起，其中有几个已经在第二章中讲过。一个有向图 D 由点的一个有限集 V 和不同的点的有序对的一个集组成。每一个这种对 (u, v) 称为一条弧或有向线并通常记作 uv。弧 uv 是从 u 到 v 的，并且关联于 u 和 v。我们也称 u 邻接于 v 及 v 由 u 邻接。一个点 v 的出度 $\mathrm{od}(v)$ 是由这个点邻接的点的数目，而入度 $\mathrm{id}(v)$ 是邻接于这个点的点的数目。

一个有向图中一条(有向)通道是点与弧的一个交替序列，$v_0, x_1, v_1, \cdots, x_n, v_n$，其中每一条弧 x_i 是 $v_{i-1}v_i$。这样一条通道的长度是 n，即其中出现的弧的数目。一条闭通道的起点和终点是同一个点，又一条生成通道含有所有的点。一条道路是其中所有的点都不同的一条通道；一个圈是一条非平凡的且所有的点都

* 事实上已经这样做了，[HNC1]。本章中的大部分定理在那里有证明。穆恩[M16]也写了一篇关于比赛图的专门论著。

不同(除了起点及终点外)的闭通道。若有一条道路从 u 到 v，则 v 称为是从 u 可达的；又，从 u 到 v 的距离 $d(u, v)$，是任何一条最短的从 u 到 v 的道路的长度。

每一条通道的方向规定为由起点 v_0 到终点 v_n。我们还需要一个概念，它类似图中的通道，没有方向的性质。一条半通道依然是点和弧的一个交替序列 $v_0, x_1, v_1, \cdots, x_n, v_n$，但是每一条弧 x_i 可能是 $v_{i-1}v_i$ 也可能是 v_iv_{i-1}。半道路，半圈等等都如所预期的那样定义。

对于一个图，它只能是连通的或者是不连通的；但是对于一个有向图，有三种不同的连通方式，每一种都有它的特色。一个有向图是强连通的或强的，若任何两点都互相可达；它是单侧连通的或单侧的，若对于任何两个点至少有一个点由另一点可达；它是弱连通的或弱的，若任何两个点由一条半道路相联结。显然，每一个强有向图是单侧的，而每一个单侧有向图是弱的；但是倒过来的判断不成立。一个有向图假如连弱的也不是，则它是不连通的。我们指出，平凡有向图，即恰由一个点组成的有向图(当然地)是强的，因为它不含两个不同的点。

我们现在可以叙述一个有向图满足三种连通性中每一种的必要与充分条件。

定理 16.1　一个有向图是强的当且仅当它有一条生成闭通道；它是单侧的当且仅当它有一条生成通道；它是弱的当且仅当它有一条生成半通道。

相当于一个图的连通支，一个有向图有三种不同类型的支。一个有向图的一个强支是一个最大的强子图；一个单侧支是一个最大的单侧子图；一个弱支是一个最大的弱子图。很容易验证，一个有向图 D 的每一个点和每一条弧恰在一个弱支中，而在至少一个单侧支中。此外，每一个点恰在一个强支中，而每一条弧根据它是不是在某个圈中，它在一个强支中或不在强支中。

一个有向图的各种支中最重要的是强支。理由之一是它们可以产生一个新的有向图，这个有向图虽然比较简单但是它保留了

原来的有向图的某些结构特性。令 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 D 的强支，D 的凝聚 D^* 以 D 的强支作为它的点，当在 D 中至少有一条弧从 S_i 的一个点到 S_j 的一个点时 D^* 中有一条 S_i 到 S_j 的弧。（见图16.1。）

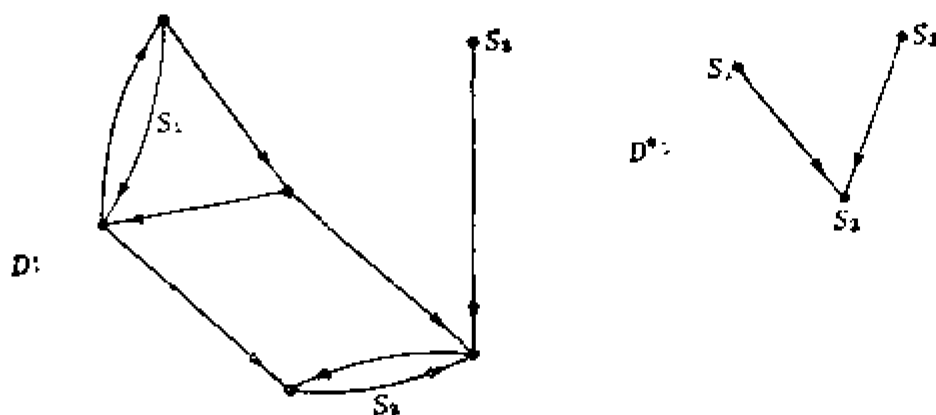


图 16.1 一个有向图和它的凝聚。

由强支的最大性可见，任何一个有向图 D 的凝聚 D^* 没有圈。显然，任何一个强有向图的凝聚是平凡有向图。可以证明，一个有向图是单侧的当且仅当它的凝聚有一条唯一的生成道路。

2. 方向对偶和无圈有向图

D 的逆有向图 D' 与 D 有同样的点，弧 uv 在 D' 中当且仅当弧 vu 在 D 中。于是，D 的逆有向图是由反转 D 的每一条弧的方向得到的。我们已经遇到过其他的逆概念，例如入度与出度，这些与方向有关的概念由一个相当有力的原则联系起来，这是二元关系理论中的一个经典结果。

方向对偶原则 对于每一个关于有向图的定理有一个相应的定理，它由将每一个概念代以它的逆概念得到。

我们现在说明怎样用这个原则来产生新结果。一个无圈的有向图不含有有向圈。

定理 16.2 一个无圈有向图至少有一个点的出度等于零。

[证明] 考虑有向图中任何一条最长的道路的最后一个点。

这个点不能有由它邻接的点，因为否则就有一个圈或者这条道路就不是最长的。

应用方向对偶原则立即可以得到对偶的定理。仍旧用 D' 来记有向图 D 的逆有向图，我们将用"加撇"的办法来记对偶的结果。

定理 16.2′ 一个无圈有向图 D 至少有一个点的入度等于零。

已经说过，任何一个有向图的凝聚是无圈的，而前述定理给出了关于无圈有向图的某些知识。我们现在提出几个特征。

定理 16.3 一个有向图 D 的下列性质是等价的。

1. D 是无圈的。
2. D^* 同构于 D。
3. D 的每一条通道是一条道路。
4. 可以将 D 的点编号，使得邻接矩阵 $A(D)$ 是上三角形的。

有两种对偶的无圈有向图有特殊的兴趣。D 的一个源是一个点，它可达所有其余的点。一个汇是它的对偶概念。一个出树*是一个有向图，它有一个源而没有半圈；一个入树是它的对偶。见图16.2。

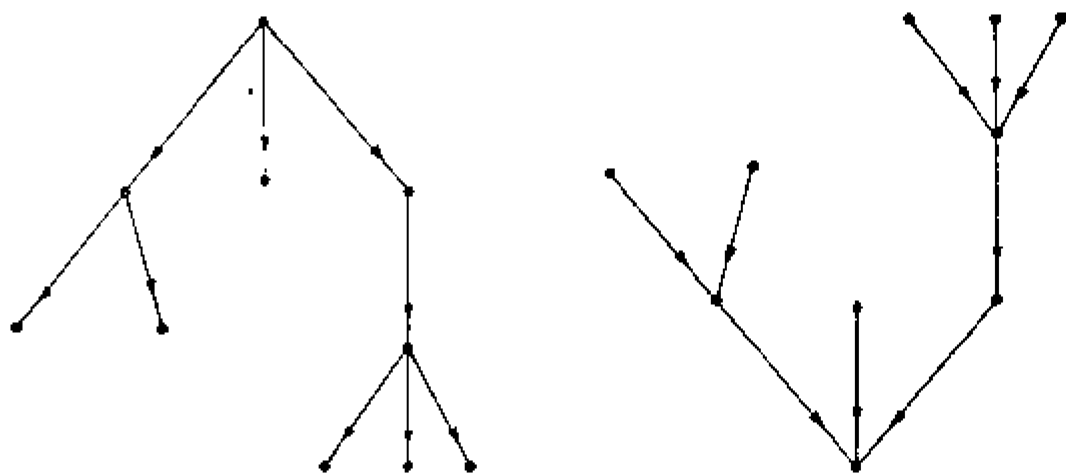


图 16.2 一个出树和它的逆入树。

* 贝尔热[B12, p. 13]称之为"arborescence"。

定理 16.4 一个弱有向图是一个出树当且仅当恰有一个点的入度等于 0，而其余所有的点的入度等于 1。

定理 16.4′ 一个弱有向图是一个入树当且仅当恰有一个点的出度等于 0，而其余所有的点的出度等于 1。

下面我们考虑几个有向图，它们与上面所讲的有向图密切有关。

一个**函数的有向图**是一个有向图，其中每一个点的出度等于 1；一个**逆函数的有向图**是它的对偶，见图 16.3。下一个定理和它的对偶定理提供了这种图的结构特征。

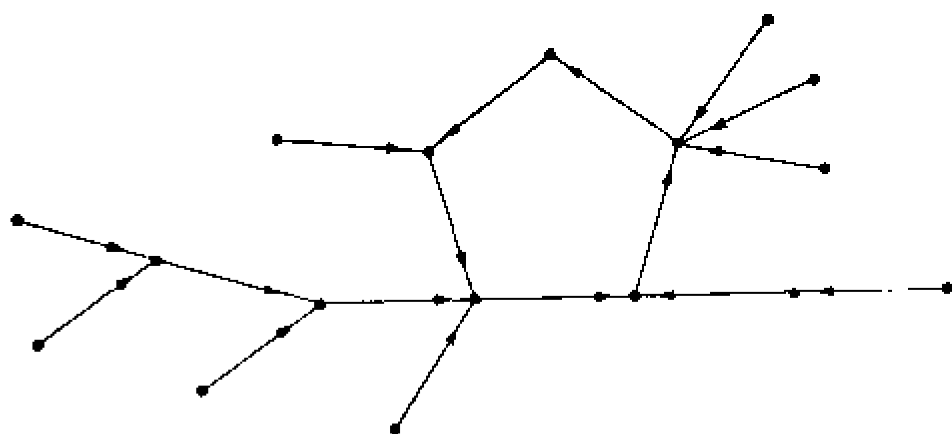


图 16.3 一个弱函数有向图。

定理 16.5 对于一个弱有向图 D，下列陈述是等价的：

1．D 是函数的。

2．D 恰有一个圈，移去这个圈的弧产生一个有向图，其中每一个弱支是一个入树。

3．D 恰有一个圈 Z，移去 Z 的任何一条弧产生一个入树。

D 的一个**点基**是点的一个最小的集合，由它们可达所有的点。于是，一个有向图 D 的点的一个集 S 是一个点基当且仅当 D 的每一个点由 S 的一个点可达，而 S 中没有一个点由 S 中任何一个其他的点可达。

定理 16.6 每一个无圈有向图有唯一的一个点基，它由所有入度等于 0 的点组成。

系 16.6(a) 一个有向图 D 的每一个点基由 D 的构成 D^* 的

点基的每个强支中的正好一个点组成。

一个1-基是互相不邻接的点的一个最小的集合S，使D的每一个点或者在S中，或者由S中的一个点邻接。每一个有向图有一个点基，但并不是每一个有向图都有1-基。例如，奇圈都没有1-基。对一个任意的有向图，还没有找到一个准则来判定它有没有1-基。理查森(Richardson)[R9]的定理推广了冯·纽曼(von Neumann)和摩根斯顿(Morgenstern)[NM1]在他们研究对策论中发现的一个结果，这个结果现在作为定理16.7的系。

定理16.7　每一个没有奇圈的有向图有一个1-基。

系16.7(a)　每一个无圈有向图有一个1-基。

3. 有向图和矩阵

一个有向图D的邻接矩阵$A(D)$是$p\times p$阶矩阵$[a_{ij}]$，若v_iv_j是D的一条弧，则$a_{ij}=1$；否则等于0。用图16.4中的例可以验证，$A(D)$的行和给出D的点的出度，而列和是点的入度。

和图的情形一样，一个有向图的邻接矩阵A的幂给出关于由一个点到另一个点的通道的数目的讯息。

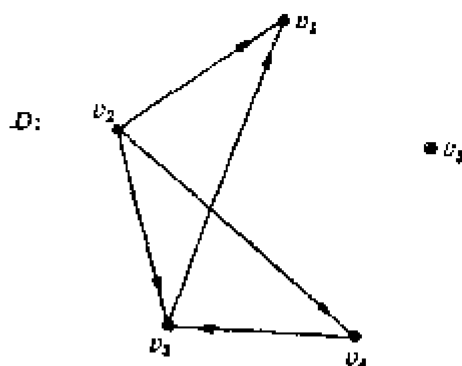


图16.4　一个有向图。

定理16.8　A^n的i, j元$a_{ij}^{(n)}$是由v_i到v_j的长度等于n的通道的数目。

我们简单地提一下另外三个和D有关的矩阵，即可达性矩阵、距离矩阵和迂回矩阵。在可达性矩阵R中，若v_j由v_i可达，则$r_{ij}=1$；否则等于0。距离矩阵的i, j元给出由点v_i到点v_j的距离，若没有由v_i到v_j的道路，则这个距离是无穷大。在迂回矩阵中，i, j元是由v_i到v_j的任何一条最长的道路的长度。同样，如果没有这样的道路，这个元是无穷大。图16.4中的有向图D的这三个矩阵是：

可达性矩阵	距离矩阵	迂回矩阵
$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&\infty&\infty&\infty&\infty\\ 1&0&1&1&\infty\\ 1&\infty&0&\infty&\infty\\ 2&\infty&1&0&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&\infty&\infty&\infty&\infty\\ 3&0&2&1&\infty\\ 1&\infty&0&\infty&\infty\\ 2&\infty&1&0&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&0 \end{bmatrix}$

系 16.8(a) 可达性矩阵和距离矩阵的元可以由 A 的幂如下得到：

(1) 对所有的 i, $r_{ii}=1$, $d_{ii}=0$*。

(2) $r_{ij}=1$ 当且仅当对某一个 n, $a_{ij}^{(n)}>0$。

(3) $d(v_i, v_j)$是最小的使 $a_{ij}^{(n)}>0$ 的 n（如果这样的 n 存在），否则等于 ∞。

还没有有效的办法来求迂回矩阵的元。这个问题与图论中另外几个多年没有解决的算法问题密切有关，例如求生成圈和旅推销员问题**。

两个矩阵 $B=[b_{ij}]$和 $C=[c_{ij}]$的按元素的积*** $B\times C$ 以 $b_{ij}c_{ij}$ 为它的 i, j 元。可达性矩阵对于求强支是有用的。

系 16.8(b) 令 v_i 是有向图 D 的一个点，D 的含 v_i 的强支由矩阵 $R\times R^T$ 中的第 i 行（或列）中等于 1 的元所决定。

一个给定的有向图中生成入树的数目由博特(Bott)和梅伯里(Mayberry)[BM2]所发现，而由托特[T9]所证明。为了给出这个称为有向图的矩阵-树定理的结果，我们需要另外几个与 D 有关的矩阵。令 M_{od} 是在 $-A$ 中用 od(v_i)来代替第 i 个对角线元得到的矩阵。矩阵 M_{id} 对偶地定义。

定理 16.9 对任何一个标定有向图 D，M_{od} 的第 i 行中的任

---

* d_{ij} 是距离矩阵的 i, j 元。——译注

** 考虑一个网络 N，它由给一个强有向图 D 的每一条弧指定一个正整数（费用）而得到。推销员问题要求一种在 N 中找出一条通道的算法，使推销员可以经这条通道到达每一个点后再回到起点，而所经过的各条弧的总费用最小。

*** 有时称为"哈达马积(Hadamard Product)"。

何一个元的余因子的值是以 v_i 为汇的生成入树的数目。

定理 16.9′ M_{id} 的第 j 列中任何一个元的余因子的值是以 v_j 为源的生成出树的数目。

按定理 16.9, 图 16.5 中的有向图的矩阵 M_{od} 中第 4 行各个元的余因子都等于 3, 而以 v_4 为汇的 D 的 3 个生成入树都已经画出；它的方向对偶，定理 16.9′ 也由 M_{id} 的第 2 列和以 v_2 为源的两个生成出树来说明。

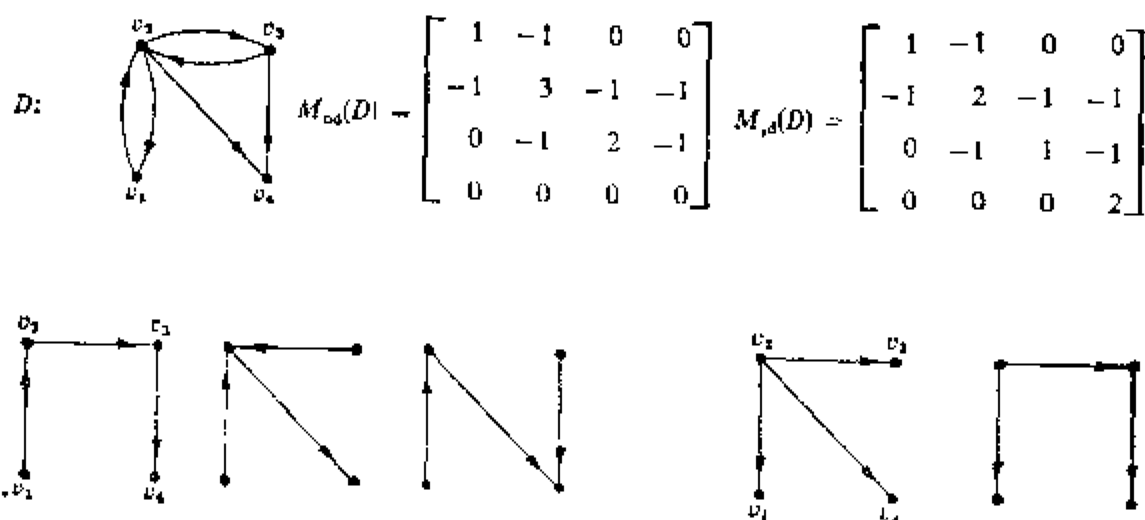


图 16.5　生成入树和出树。

一个有向图 D 中的一条欧拉迹是一条闭生成通道，其中 D 的每一条弧恰出现一次。一个有向图是欧拉的，如果它有上述的这样一条迹。如在定理 7.1 中对于图所作的那样，容易证明，一个弱有向图 D 是欧拉的当且仅当 D 的每一个点的入度和出度相等。现在我们要叙述一个定理，它给出一个欧拉有向图中欧拉迹的数目。它有时按照它的发现者德布鲁因、范·阿登-埃伦费斯特 (van Aardenne-Ehrenfest)、史密斯和托特而命名为 BEST 定理，它由前面两人 [BE1] 与后面两人 [ST1] 独立地发现。它可以用有向图的矩阵-树定理简洁地证明，见卡斯特莱因 [K4, p. 76]。

系 16.9(a) 在一个欧拉有向图中，欧拉迹的数目等于

$$c\cdot\prod_{i=1}^{d}(d_i-1)!,$$

其中，$d_i=\mathrm{id}(v_i)$，c 是 M_{od} 的所有余因子的公共值。

注意对于一个欧拉有向图 D, 我们有 $M_{od}=M_{id}$, 且所有行和与列和都等于零,所以所有的余因子都相等。对于图 16.6 中的有向图, $c=7$, 其中就有 14 条欧拉迹。其中的两条是

$$v_1 v_2 v_3 v_4 v_2 v_1 v_3 v_1 v_4 v_1 \text{ 和 } v_1 v_3 v_1 v_4 v_2 v_3 v_4 v_1 v_3 v_1。$$

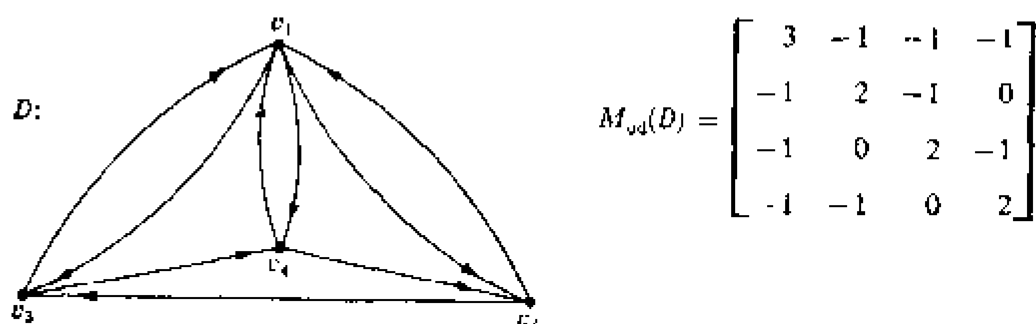


图 16.6 计数欧拉迹。

我们刚才给了如何利用矩阵来研究有向图的一些指示。另一方面, 有向图也可以用来给出关于矩阵的知识。 任何一个方阵 $M=[m_{ij}]$ 引出一个有向图 D, 当 $m_{ij}\neq 0$ 时使弧 v_iv_j 在 D 中。 这样也可能引出环。下列算法[H25]有时可以使一个矩阵的特征值和逆矩阵(如果它存在)的求法简化。

1. 构成联系于 M 的有向图 D。

2. 定出 D 的强支。

3. 构成凝聚 D^*。

4. 将强支编号, 使 D^* 的邻接矩阵是上三角形的。

5. 按强支重新编号 D 的点, 使它的邻接矩阵 A 是上分块三角形的。

6. 将 A 的每一个单位元代以 M 的相应于它的元。

M 的特征值是新矩阵的对角线块的特征值, 而 M 的逆矩阵可以由这些对角线块的逆矩阵求得。

当 M 是一个稀疏矩阵*时(尤其是当零元被巧妙地安置以致形成几个强支时), 这个办法是很有效的。 达尔迈奇和门德尔松[DM2]利用二部图将上述方法推广为有时是更有力的但也是更繁复的一种算法。

---

* 在文献中,一个稀疏矩阵被定义为有许多个零的矩阵。

4. 比赛图

一个比赛图是一个定向的完全图。图 16.7 中画出所有有二个、三个和四个点的比赛图。第一个有三个点的比赛图称为可递三元组，第二个是循环三元组。

在一个循环赛中，一个给定的选手集或队的集进行一种比赛，按这种比赛的规则没有平局。每一对选手都互相比赛并产生正好一个胜利者。选手用点来代表，对于每一对点画一条弧从胜者到负者就产生一个比赛图。

所发现的关于比赛图的第一个定理属于雷迪(Rédei)[R7]。对于小的比赛图它可以用图 16.7 来验证。

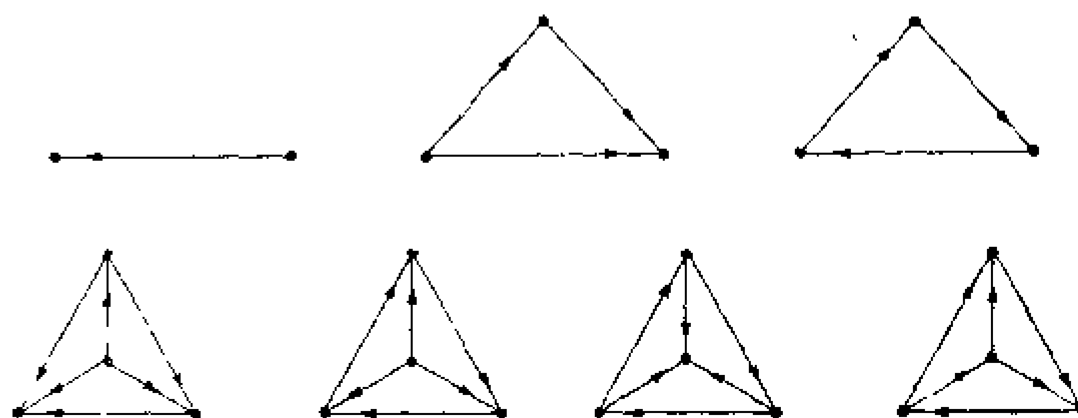


图 **16.7**　小的比赛图。

定理 16.10　每一个比赛图有一条生成道路。

[证明]　对于点的数目使用归纳法。可以看出，有 2 个、3 个或 4 个点的比赛图有一条生成道路。假定对于所有有 n 个点的比赛图这个结果成立，考虑一个有 $n+1$ 个点的比赛图 T。令 v_0 是 T 的任何一个点，则 $T-v_0$ 是一个有 n 个点的比赛图，所以它有一条生成道路 P，例如 $v_1v_2\cdots v_n$。或者是弧 v_0v_1 在 T 中，或者是弧 v_1v_0 在 T 中。若 v_0v_1 在 T 中，则 $v_0v_1v_2\cdots v_n$ 是 T 的一条生成道路。若 v_1v_0 在 T 中，令 v_i 是 P 中第一个使得弧 v_0v_i 在 T 中的点(如果这种点存在)。于是 $v_{i-1}v_0$ 在 T 中，所以 $v_1v_2\cdots v_{i-1}v_0v_i\cdots v_n$ 是一条生成道路。如果这样的点不存在，则 $v_1v_2\cdots v_nv_0$ 是一条生

成道路。在任何情况下，我们都已经证明了 T 有一条生成道路。证毕。

兹尔(Szele)[S16]推广了这个结果，他证明了每一个比赛图有奇数条生成道路。雷迪定理的另一种形式的推广由加莱和米尔格雷姆(Milgram)[GM1]提出。他们证明了每一个定向图 D 含有一个由至多 $\beta_0(D)$ 条点不相交的道路组成的覆盖 $V(D)$ 的集。

下一个定理属于莫舍[HM2]；它的系由福克斯(Foulkes)[F7]和卡米恩(Camion)[C1]发现。这个定理与前一个对任意比赛图成立的定理类似，但它只对强比赛图成立。

定理 16.11 每一个有 p 个点的强比赛图，对 $n=3, 4, \cdots, p$，有一个长度等于 n 的圈。

[证明] 这个证明也用归纳法，但它是对圈的长度进行。若一个比赛图是强的，则它一定有一个循环三元组。假定 T 有一个圈 $Z=v_1v_2\cdots v_nv_1$，长度等于 $n<p$。我们要证明，它有一个长度等于 $n+1$ 的圈。有两种情形：或者有一个不在 Z 中的点 u，它既邻接于 Z 中的点，又由 Z 中的点邻接；或者没有这样的点。

情形 1. 假定有一个点 u 不在 Z 中，而点 v 和点 w 在 Z 中使弧 uv 和 wu 在 T 中。不失一般性，我们假定弧 v_1u 在 T 中。令 v_i 为由 v_1 绕 Z 走时使得弧 uv_i 在 T 中的第一个点。则 $v_{i-1}u$ 在 T 中，而 $v_1v_2\cdots v_{i-1}uv_i\cdots v_nv_1$ 是一个长度等于 $n+1$ 的圈。

情形 2. 没有情形 1 中那样的点 u。从而所有不在 Z 中的 T 的点分成两个子集 U 和 W，其中 U 是邻接于 Z 的每一个点的所有点的集，而 W 是由 Z 的每一个点邻接的所有点的集。显然，这两个集不相交且都不是空集，因为否则 T 就不是强的了。而且，在 U 中有点 u，在 W 中有点 w，使得弧 wu 在 T 中。于是，$uv_1v_2\cdots v_{n-1}wu$ 是 T 中的一个长度等于 $n+1$ 的圈。

从而总有一个长度等于 $n+1$ 的圈。证毕。

系 16.11(a) 一个比赛图是强的当且仅当它有一个生成圈。

用循环赛的语言，我们将一个比赛图中一个点的出度称为它的得分。下一个属于兰道(Landau)[L1]的定理实际上是在对比

赛图作直观研究(所谓"啄食次序"(pecking orders))时发现的。其中点是鸡,弧是指啄食。

定理 16.12 由一个得分最大的点到其他任何一个点的距离等于1或2。

可递三元组的数目可以用点的得分来给出;见哈拉里和莫舍[HM2]。作为一个系,立即可以得到有名的肯德尔(Kendall)和史密斯(Smith)[KS1]的公式,这个公式在统计分析中已经被证明是有用的。这个公式已经由拜内克和哈拉里[BH4]从循环三元组推广到更大的强子比赛图。

定理 16.13 一个有得分序列$(s_1, s_2, \cdots, s_p)$的比赛图中可递三元组的数目等于$\sum s_i(s_i-1)/2$。

系 16.13(a) 在所有有p个点的比赛图中循环三元组的最多数目等于

$$t(p, 3)=\begin{cases}\dfrac{p^3-p}{24}, & \text{若 } p \text{ 是奇数;}\\[2mm] \dfrac{p^3-4p}{24}, & \text{若 } p \text{ 是偶数。}\end{cases}$$

关于比赛图重构的附记

乌拉姆猜想在比赛图这种特殊情形下已经部分地解决了。如对于图那样,每一个有p个点的比赛图T决定p个子比赛图

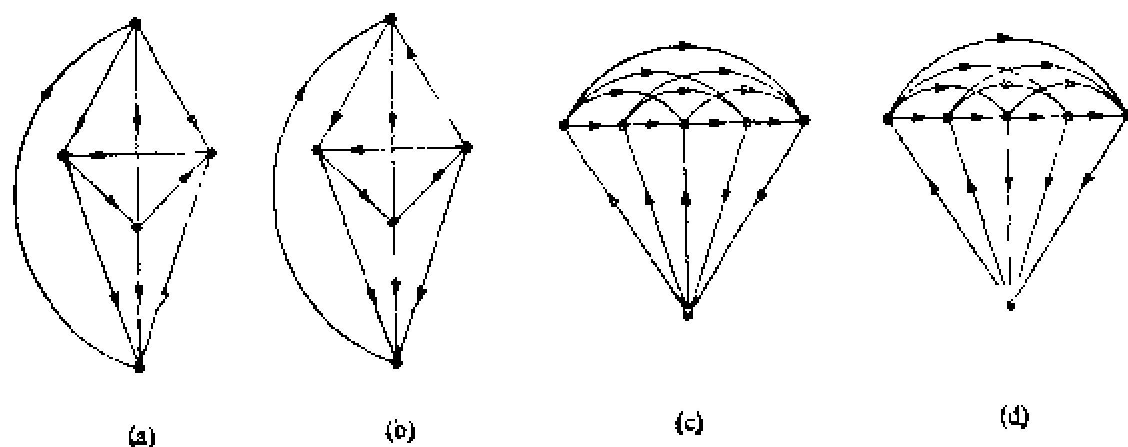


图 16.8 两对不可重构的强比赛图。

$T_i = T - v_i$。我们证明了*有至少5个点的任何一个不强的比赛图可以重构。然而，对于 $p=5$ 和6的强比赛图，这个猜想不成立。这是 L. W. 拜内克和 E. M. 帕克(Parker)建立的。他们发现了两对比赛图，图16.8(a, b)和图16.8(c, d)都是反例。

还不知道有更大的反例，我们猜测它们不存在!

习题

16.1　一个有向图是严格弱的，若它是弱的但不是单侧的；它是严格单侧的，若它是单侧的但不是强的。令 C_0 含有所有不连通的有向图，C_1 含有所有严格弱的有向图，C_2 含有所有严格单侧的有向图，C_3 含有所有强有向图。则在所有有 p 个点的有向图中，对于连通性类型 C_i，$i=0$ 到3，弧的最多与最少的可能数目 q 在下表中给出：

类　　型	弧的最少数目	弧的最多数目
0	0	$(p-1)(p-2)$
1	$p-1$	$(p-1)(p-2)$
2	$p-1$	$(p-1)^2$
3	p	$p(p-1)$

（卡特赖特和哈拉里[CH1]）

16.2　两个有向图的笛卡儿积 $D_1 \times D_2$ 以 $V_1 \times V_2$ 为它的点集，当[$u_1 = v_1$ 且 $u_2 \operatorname{adj} v_2$]或[$u_2 = v_2$ 且 $u_1 \operatorname{adj} v_1$]时 (u_1, u_2) 邻接于 (v_1, v_2)。（这个定义，除了邻接性是有方向的外与第二章中对于图的定义一致。）当 D 在连通性类型 C_n 中时，我们记 $c(D)=n$。则 $c(D_1 \times D_2) = \min\{c(D_1), c(D_2)\}$，但除了 $c(D_1) = c(D_2) = 2$，在这种情形下 $c(D_1 \times D_2) = 1$**。

（哈拉里和特劳思[HT1]）

16.3　没有一个严格弱有向图含有一个点，使得移去这个点

* F. Harary, E. M. Palmer, On the problem of reconstructing a tournament from subtournaments, *Monatshefte für Math.* **71** (1967), 14~23。

** 原书印误。——译注

后产生一个强有向图。　　(哈拉里和罗斯(Ross)[HR2])

*16.4　存在一个有向图，它有出度序列$(s_1, s_2, \cdots, s_p)$，其中$p-1\geqslant s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_p$；又有入度序列$(t_1, t_2, \cdots, t_s)$，其中每一个$t_i\leqslant p-1$。存在这种情况的充要条件是$\sum s_i=\sum t_i$，又对于每一个整数$k<p$，

$$\sum_{i=1}^{k} s_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}\min\{k-1,\ t_i\}+\sum_{i=k+1}^{p}\min\{k,\ t_i\}。$$

(赖泽(Ryser)[R21]，富尔克森[F12])

*16.5　存在有上题所述出度与入度序列的一个强有向图当且仅当$\sum s_i=\sum t_i$，每个$s_i>0$，每个$t_i>0$，又对每一个整数$k<p$，下列严格不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{k} s_i<\sum_{i=1}^{k} t_i+\sum_{i=k+1}^{p}\min\{k,\ t_i\}。$$

(拜内克和哈拉里[BH1])

16.6　线有向图$L(D)$以给定的有向图D的弧为它的点，当弧x, y在D中导出一条通道时，x在$L(D)$中邻接于y。用D的点与弧的数目来计算$L(D)$的点与弧的数目。

(哈拉里和诺曼[HN4])

16.7　一个弱有向图D的线有向图$L(D)$同构于D当且仅当D或D'是函数的。　　(哈拉里和诺曼[HN4])

16.8　若D是不连通的，上题的断言不成立。

*16.9　令S和T是D的点的两个不相交的集，又令$X(S, T)$是从S到T的所有弧的集。则D是一个线有向图当且仅当没有两个二点集S和T，使得$|X(S, T)|=3$。

(盖勒和哈拉里[GH1]，海肯(Heuchenne)[H42])

16.10　一个有向图D中的欧拉迹的数目等于$L(D)$中哈密顿圈的数目。　　(卡斯特莱因[K3])

16.11　令T_1由一个点和两个有向环组成。令$T_2=L(T_1)$是T_1的线有向图(更精确地说是伪有向图)，它由一般所预期那样地定义，又递推地定义$T_n=L(T_{n-1})$。T_n的构造曾经被称为“传真

图解"。则 T_n 中的欧拉迹的数目是

$$2^{2^{n-1}-1}。$$

（德布鲁因和埃伦费斯特[BE1]）

***16.12**　每一个有向图如果所有的 v 都有 $\mathrm{id}(v)$, $\mathrm{od}(v) \geqslant p/2$, 则它是哈密顿的。　（戈拉-霍里[G7]）

16.13　考虑这样的有向图，其中对于每一个点 u, 从 u 到各点 v 的距离的和 $\sum d(u, v)$ 是常数。构造一个这种有向图，且使它不是点对称的。　（哈拉里[H20]）

16.14　补有向图 $\bar{D}$ 和逆有向图 D' 都与 D 有相同的群。

16.15　令 A 是一个完全的对称有向图*的线有向图的邻接矩阵。则 A^2+A 的所有的元等于 1。　（霍夫曼[H45]）

16.16　两个有向图是*同谱的*，若它们的邻接矩阵有相同的特征多项式。恰存在 3 个有 4 个点的不同的同谱强有向图。

（F. 哈拉里，C. 金，R. C. 里德）

16.17　两个有向图 D_1 和 D_2 的*结合* $D=D_1 \wedge D_2$ 以 $V=V_1 \times V_2$ 作为它的点集，当在 D_1 中 $u_1 \mathrm{adj}\, v_1$ 而且在 D_2 中 $u_2 \mathrm{adj}\, v_2$ 时，在 D 中 $u=(u_1, u_2)$ 邻接于 $v=(v_1, v_2)$。结合 $D=D_1 \wedge D_2$ 的邻接矩阵 A 是 D_1 和 D_2 的邻接矩阵的张量积。

（哈拉里和特劳恩[HT1]）

16.18　令 D_1 和 D_2 是有向图，令 d_i 是 D_i 中所有的圈的长度的最大公约数，$i=1, 2$。则结合 $D_1 \wedge D_2$ 是强的当且仅当 D_1 和 D_2 都是强的且 d_1 和 d_2 是互素的。　（麦克安德鲁[M7]）

16.19　一个有向图称为是*本原的*，若它的邻接矩阵 A 的某个幂的所有的元是正的。一个有向图是本原的当且仅当它是强的，而且它的各个圈的长度的最大公约数等于 1。

（见达尔迈奇和门德尔松[DM3, p. 204]）

***16.20**　令 D 是一个本原有向图。

---

* 对称有向图的定义是：对于任何两个点 $u, v \in V(D)$，(u, v) 是 D 的一条弧当且仅当 (v, u) 是 D 的一条弧。——译注

a) 若 n 是使 $A^n>0$ 的最小整数，则 $n\leqslant(p-1)^2+1$。

(威兰特(Wielandt)[W17])

b) 若 n 取最大可能值 $(p-1)^2+1$，则存在一个置换阵 P，使 PAP^{-1} 为形式 $[a_{ij}]$，其中当 $j=i+1$ 时 $a_{ij}=1$，又 $a_{p1}=1$，而其余 $a_{ij}=0$。(达尔迈奇和门德尔松[DM3, p. 209])

16.21　一个图 G 的一个定向是对 G 的每一条线指定一个方向。一个图有一个强连通定向当且仅当它是连通的和无桥的。

(洛宾斯(Robbins)[R17])

16.22　令一个给定的标定图 G 的一个任意定向 D 的 $p\times q$ 阶关联矩阵是 B，使得如果定向线 x_i 关联于点 v_j，B 的元 b_{ij} 等于 $+1$；若 x_i 由 v_j 关联则等于 -1；否则等于 0。则 $\det(BB^T)$ 是 G 的生成树的数目。(将矩阵 BB^T 与第 13 章的 M 比较。)

(克希霍夫[K7])

16.23　记得第五章中说过，在一个图 G 中 $\lambda(u, v)$ 是要分离 u 和 v 需要移去的线的最少数目。类似地，当 u 和 v 是一个有向图 D 的点，令 $\vec{\lambda}(u, v)$ 是使得没有从 u 到 v 的道路需要移去的弧的最少数目。

对于一个欧拉图 G 的任何一个定向 D，对于任何一对点，

$$\vec{\lambda}(u, v)=\vec{\lambda}(v, u)=\frac{1}{2}\lambda(u, v)。$$

[注意：将这个命题推广到一个任意的图 G 要难证明得多：一个图 G 有一个定向 D，使得 $\vec{\lambda}(G)\geqslant n$ 当且仅当 $\lambda(G)\geqslant 2n$。]*

(纳什-威廉斯[N1])

16.24　一个 n 色图 G 的每一个定向含有一条长度为 $n-1$ 的道路。(加莱[G4])

16.25　一个比赛图的得分 s_i 满足 $\sum s_i^2=\sum(p-s_i)^2-p^2$。

16.26　除了二个比赛图外，所有比赛图有一条生成道路 $v_1v_2\cdots v_p$ 并且有一条捷径：弧 v_1v_p。两个例外是循环三元组和图 16.8(a)中的比赛图。(B. 格伦鲍姆)

* $\vec{\lambda}(G)$ 定义为 $\min\limits_{u,v}\vec{\lambda}(u, v)$。——译注

16.27　a) 在任何一个有 p 个点的比赛图中，长度等于 4 的圈的数目等于有 4 个点的强子比赛图的数目。

b) 在任何一个有 p 个点的比赛图中，有 4 个点的强子比赛图的数目最多等于 $t(p, 4)=\frac{1}{2}(p-3)t(p, 3)$。见系 16.13($a$)。

（拜内克和哈拉里[BH4]）

16.28　一个群同构于某个比赛图的点群当且仅当它的阶是奇数。　　（穆恩[M14]）

16.29　令一个比赛图 T 的点群是 Γ，弧群是 Γ_1。则 Γ_1 是可迁的当且仅当 Γ 的对群是可迁的。　　（杰恩 Jean[J1]）

16.30　令 $t(x)$ 和 $s(x)$ 分别是比赛图和强比赛图的生成函数。则

$$s(x)=\frac{t(x)}{1+t(x)}。$$

（穆恩[M16, p. 88]）

13.31　考虑非负整数的一个序列 $s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_p$。

a) 这是某个比赛图 T 的得分序列当且仅当

$$\sum_1^p s_i=p(p-1)/2,$$

并且对于所有的 $k<p$，$\sum_1^k s_i\geqslant k(k-1)/2$。　　（兰道[L1]）

b) 此外，T 是强的当且仅当对于所有的 $k<p$，

$$\sum_1^k s_i>k(k-1)/2。$$

（哈拉里和莫舍[HM2]）

附录Ⅰ 图的图解

千言万语不及一张图。

——佚名

图的图解对于积累资料来作出猜想是很有用处的。少于6个点的这些图是容易画出来的。这里给出的有6个点的图的图解是D. W. 克劳(Crowe)作出的，看来他也是第一个画出所有的有7个点的图的人。排列这些图解时并不想解决下列问题，即对有p个点和q条线的各个图指定一种标准次序。然而，对于每个图G还是指定了一个编号n，同一个编号也给予补图$\overline{G}$。从而，图$G_{p,q,n}$是第n个(p, q)图，并且将数n记在它的图解的右侧；此外，$\overline{G}_{p,q,n}=G_{p,\binom{p}{2}-q,n}$。当然，(4,3)图和(5,5)图是这个规则的例外。

作为这个表的一个补充，B. R. 希普(Heap)在密特尔萨克斯国立物理实验所的计算机上设计了一个程序，它对于每一个有7个点的图造了一张卡片，并且正在为$p=8$的图造卡片。看来用邻接矩阵的形式来编排图是最方便的。对于用计算机的方法来研究图的人，这种表的存在已经证明是有价值的。

为了便利起见，我们在这里提供一张表，列出有给定数目的点和线的图的数目，直到9个点(参见赖尔顿[R15, p. 146])。表中的值是用波立亚公式(15.27)*得到的。

* 原书有误。——译注

表 A1 有 $p \leqslant 9$ 个点和 q 条线的图的数目

q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	2	2	2	2	2	2
3			1	3	4	5	5	5	5
4				2	6	9	10	11	11
5				1	6	15	21	24	25
6				1	6	21	41	56	63
7					4	24	65	115	148
8					2	24	97	221	345
9					1	21	131	402	771
10					1	15	148	663	1637
11						9	148	980	3252
12						5	131	1312	5995
13						2	97	1557	10120
14						1	65	1646	15615
15						1	41	1557	21933
16							21	1312	27987
17							10	980	32403
18							5	663	34040
g_p	1	2	4	11	34	156	1044	12346	308708

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$
$p=1$							
$p=2$							
$p=3$							
$p=4$			1 2	1 2 3	1 2		

$p=5$

$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
		1	1
		2	2
			3
			4

$q=4$		$q=5$	
1	4	1	4
2	5	2	5
3	6	3	6

$p=5$(续)

$q=6$	$q=7$	$q=8$
1 5	1	1
2 6	2	2
3	3	
4	4	

$q=9$	$q=10$

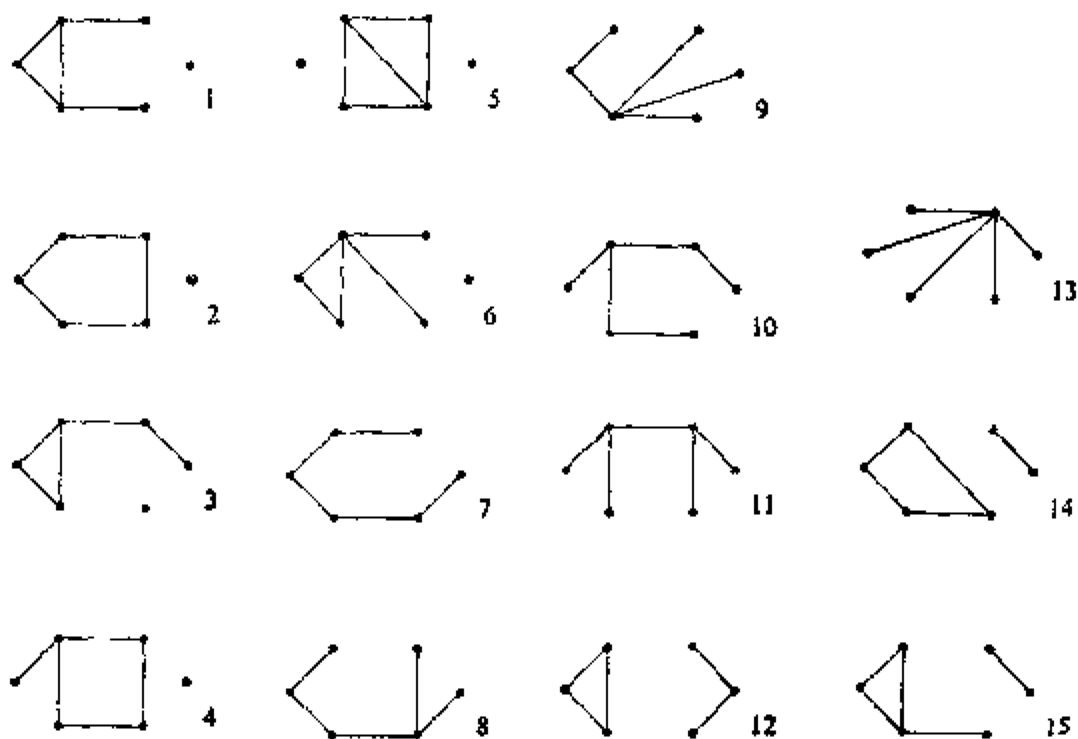
$p=6$

$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
		1	1
		2	2
			3
			4
			5

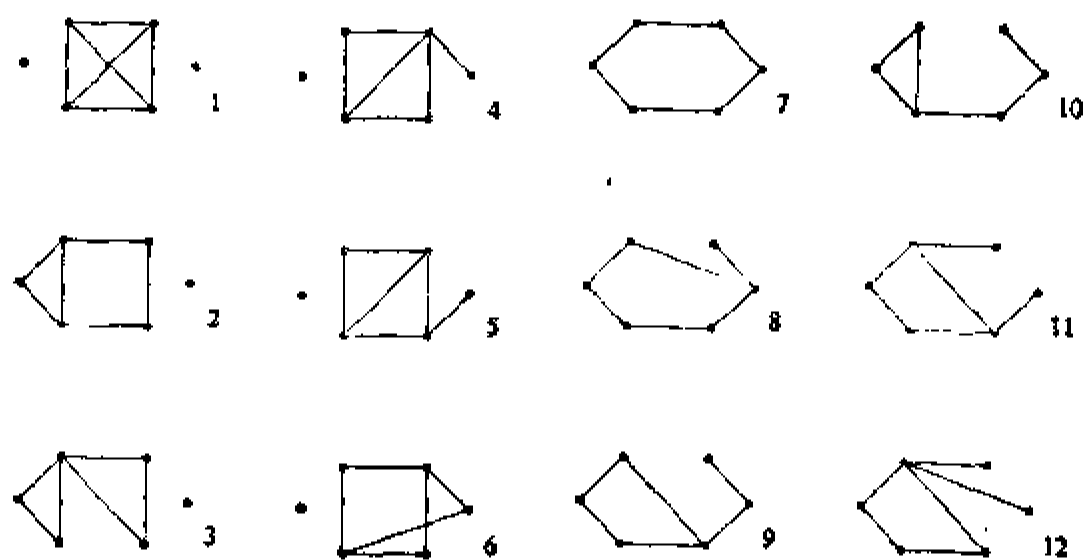
$q=4$		
1	4	7
2	5	8
3	6	9

$p=6$(续)

$q=5$

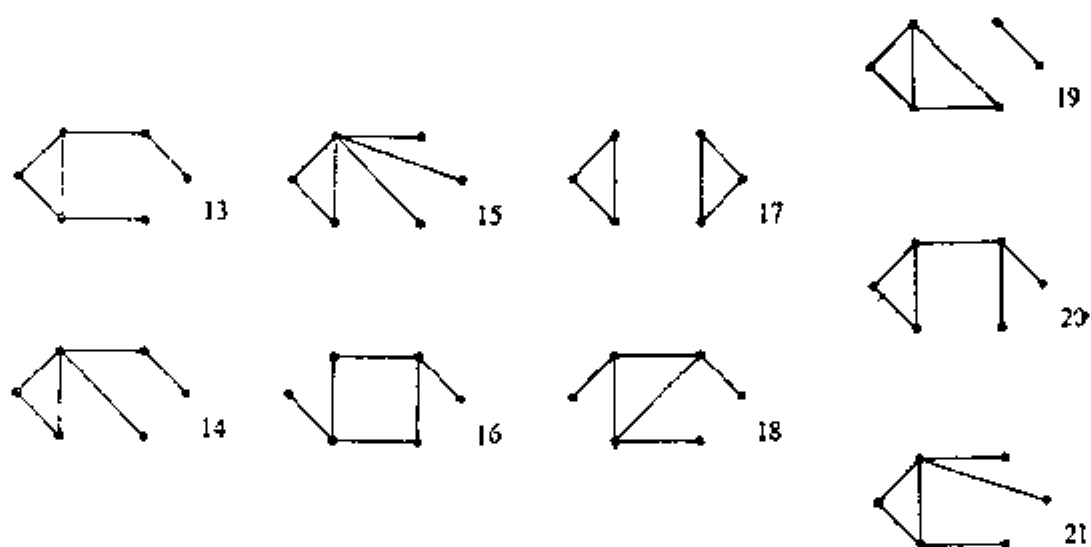


$q=6$

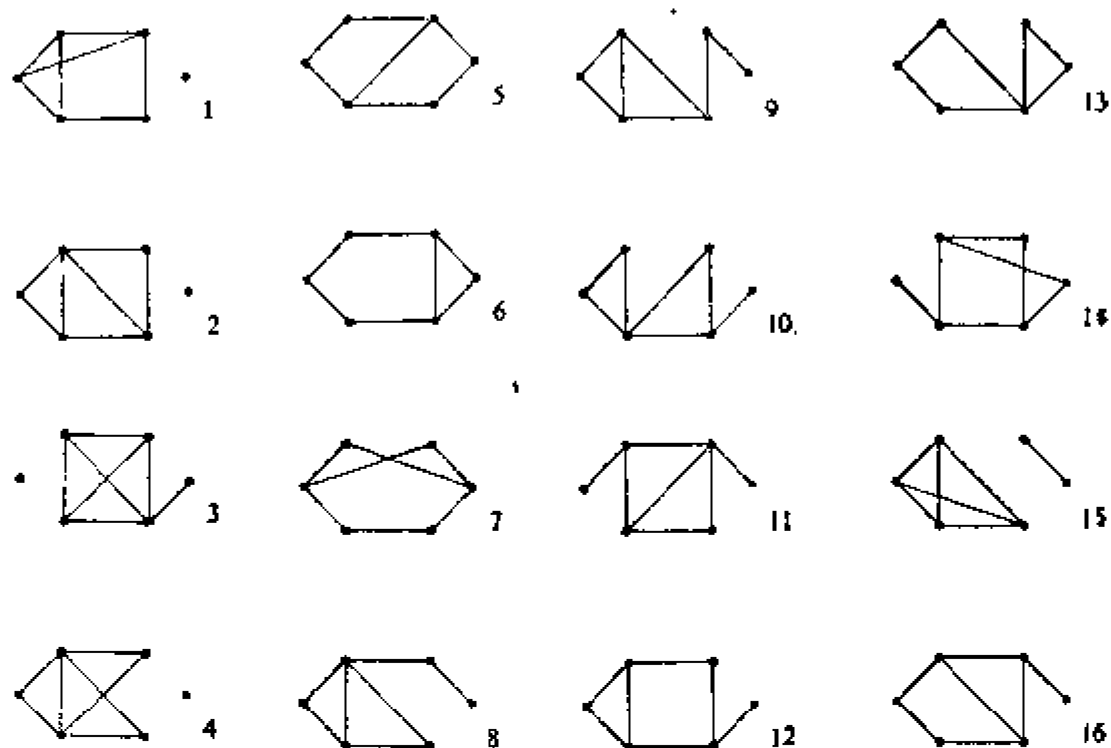


$p=6$(续)

$q=6$

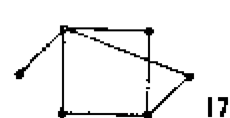


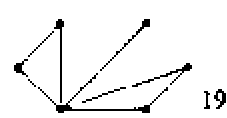
$q=7$

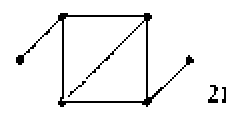


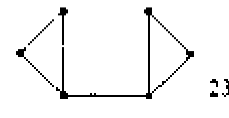
$p=6$(续)

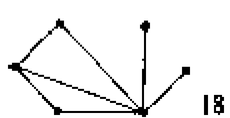
$q=7$

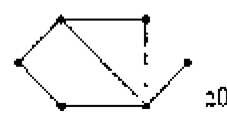

17

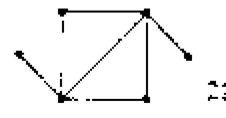

19

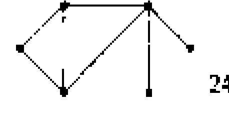

21


23

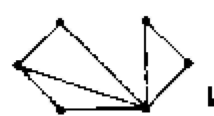

18

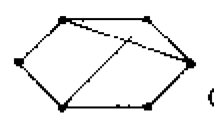

20

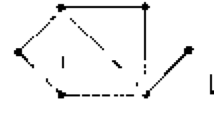

22

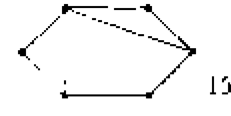

24

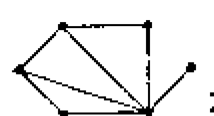
$q=8$


1

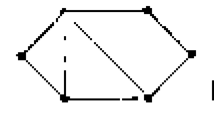

6

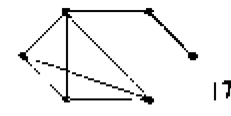

11

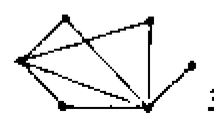

16

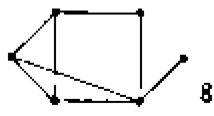

2

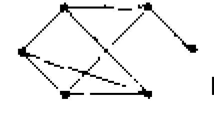

7

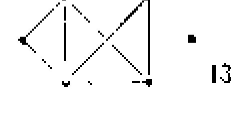

12

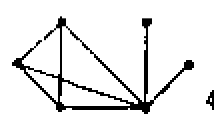

17

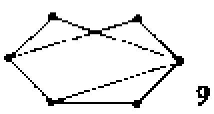

3


8

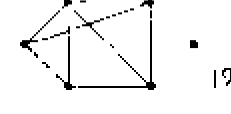

13

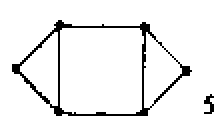

18

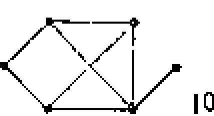

4

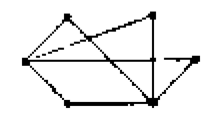

9

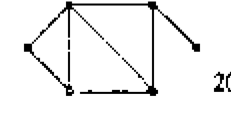

14


19


5

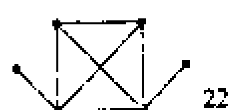
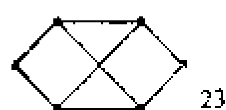
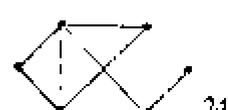

10


15

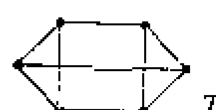
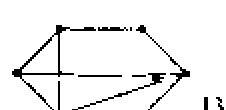
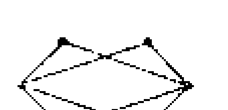
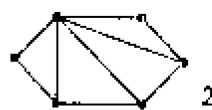
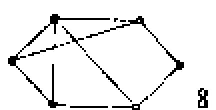
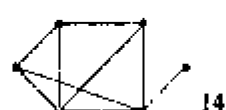
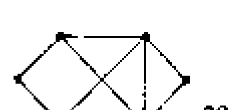
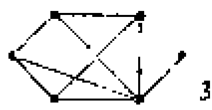
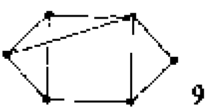
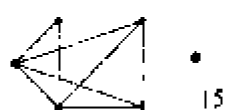
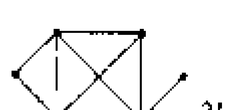
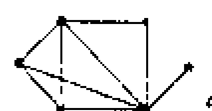
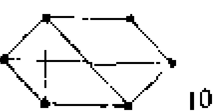
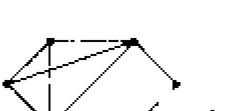
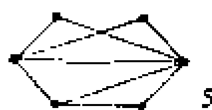
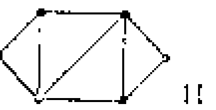
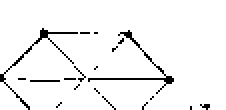
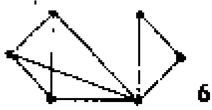
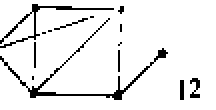
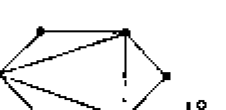

20

$p=6$(续)

$q=8$

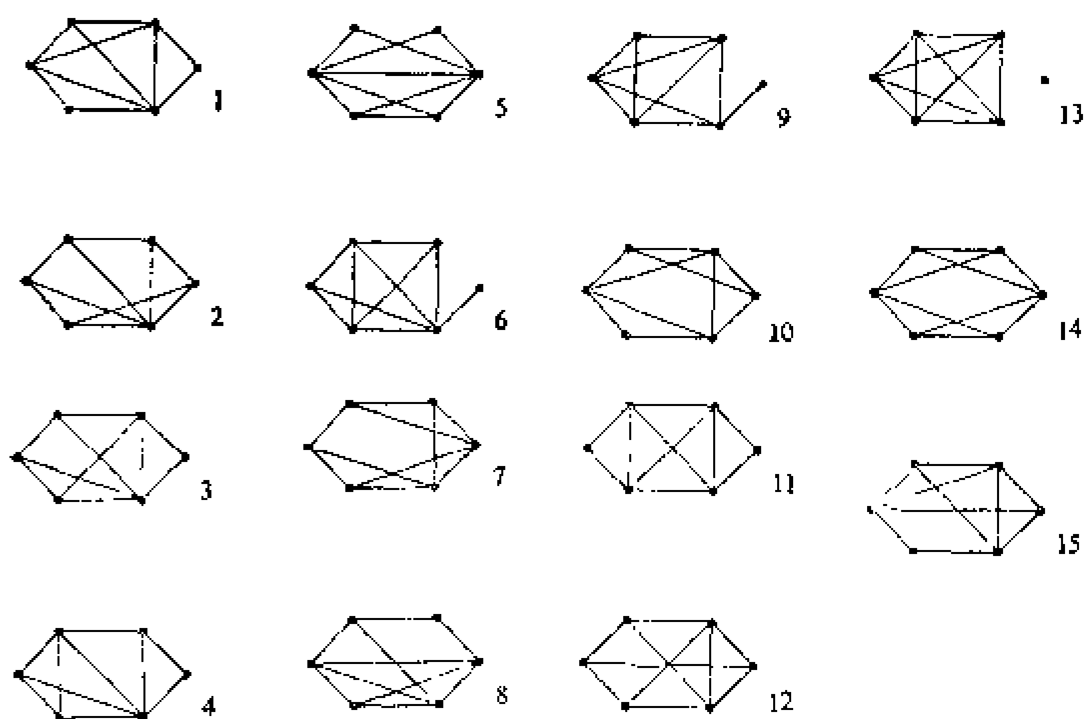





$q=9$

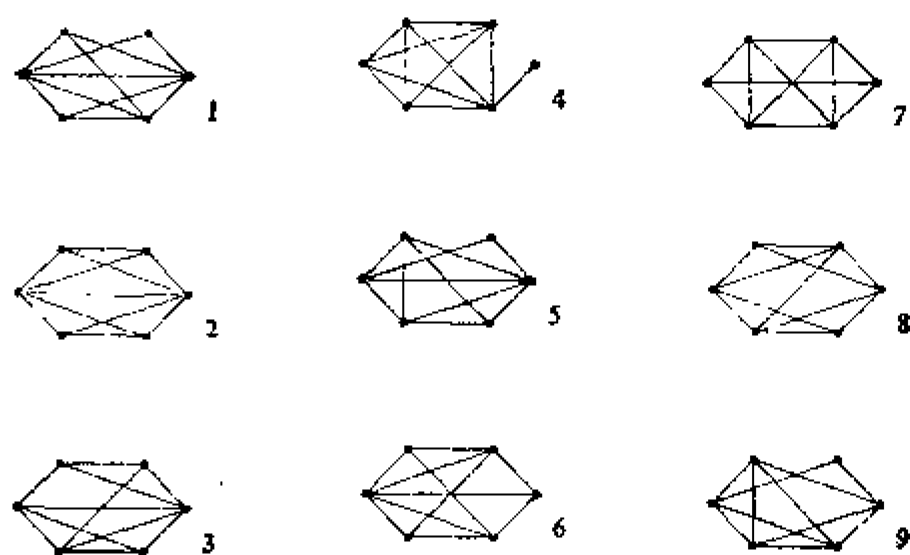






















$p=6$(续)

$q=10$



$q=11$



$p=6$(续)

$q=12$	$q=13$	$q=14$	$q=15$
1	1		
2	2		
3			
4			
5			

附录 II 有向图的图解

勇士跃马向四方。

——S· 里柯克

这里按照点和弧的数目列出有至多 4 个点的有向图。每个有向图的编号是这样指定的，即使它的补图有同样的编号，当然要除掉(3, 3)和(4, 6)有向图。图解只列到$p=4$，因为假如要包括$p=5$的那些有向图就会需要另外一本几乎与本书一样篇幅的书。下列属于奥伯谢尔普(Oberschelp)[O1]的表给出有p个点，$p\leqslant 8$，的有向图的数目。表中的值可以用方程(15.31)，(15.32)计算。

表 A2 有 $p\leqslant 8$ 个点的有向图的数目

p	d_p
1	1
2	3
3	16
4	218
5	9 608
6	1 540 944
7	882 033 440
8	1 793 359 192 848

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$
$p=1$							
$p=2$							
$p=3$			1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 2 4		

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
$p=4$			1	1 8
			2	2 9
			3	3 10
			4	4 11
			5	5 12
				6 13
				7

$p=4$(续)

$q=4$			$q=5$		
1	14	27	1	14	27
2	15		2	15	28
3	16		3	16	29
4	17		4	17	30
5	18		5	18	31
6	19		6	19	32
7	20		7	20	33
8	21		8	21	34
9	22		9	22	35
10	23		10	23	36
11	24		11	24	37
12	25		12	25	38
13	26		13	26	

$p=4$(续)

$q=6$				$q=7$	
1	14	27	40	1	14
2	15	28	41	2	15
3	16	29	42	3	16
4	17	30	43	4	17
5	18	31	44	5	18
6	19	32	45	6	19
7	20	33	46	7	20
8	21	34	47	8	21
9	22	35	48	9	22
10	23	36		10	23
11	24	37		11	24
12	25	38		12	25
13	26	39		13	26

$p=4$（续）

$q=7$	$q=8$
27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27

$q=9$	$q=10$	$q=11$	$q=12$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13	1, 2, 3, 4, 5		

附录III 树的图解

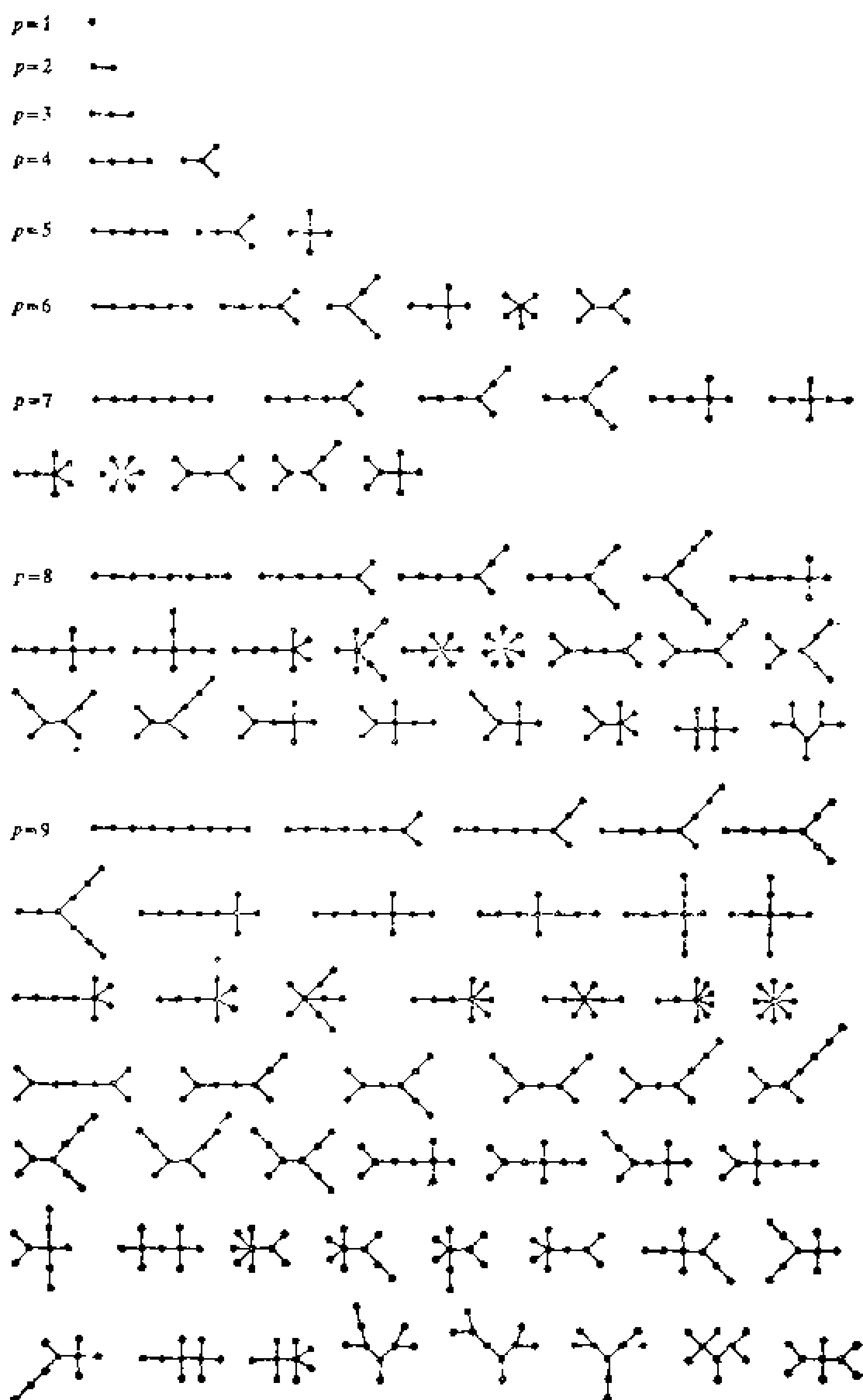
不能只见树木不见森林。

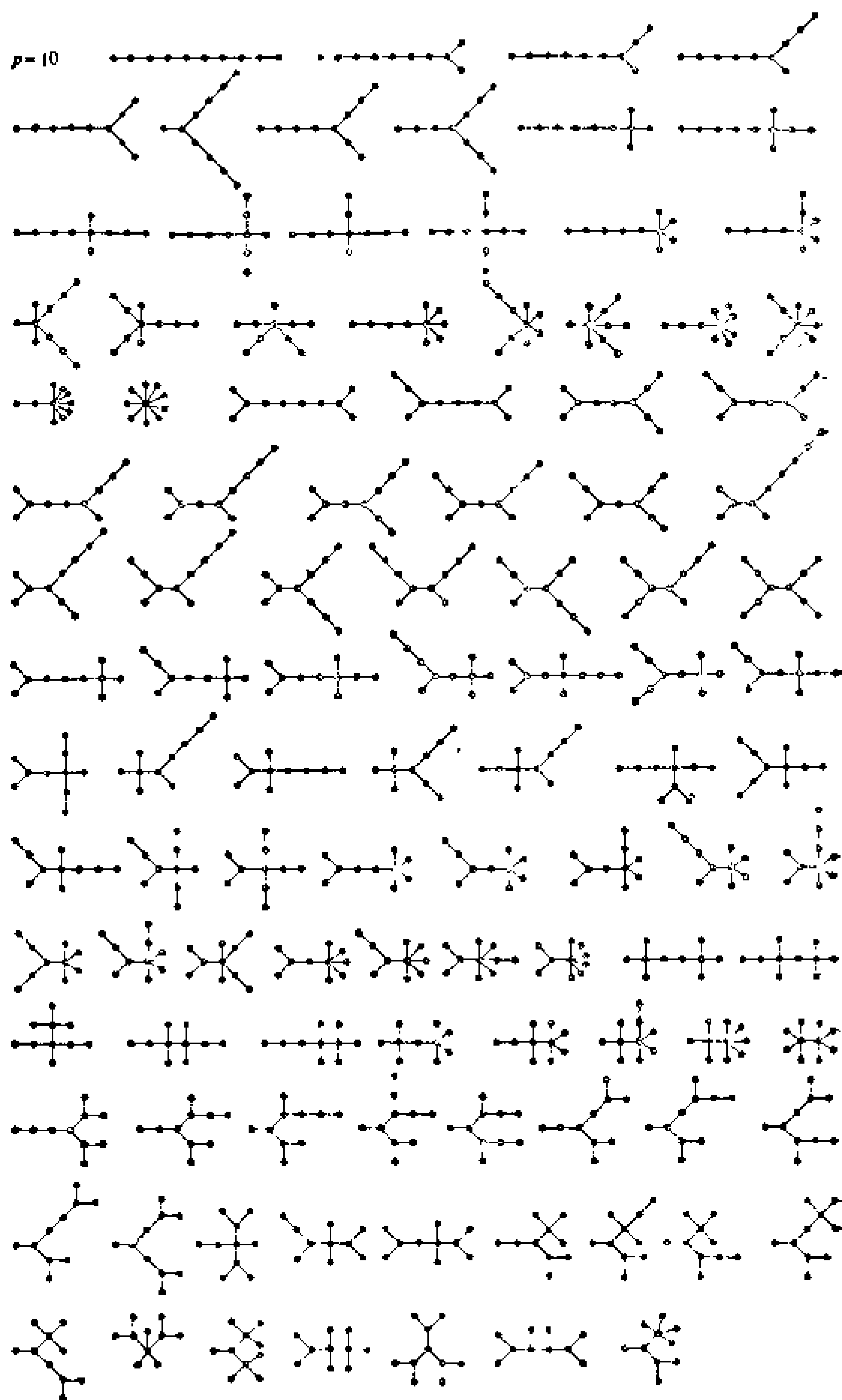
——佚名

所有有 $p\leqslant 12$ 个点的树的图解由普林斯作出，并且作为他的博士论文[P8]的附录发表。这里我们只对 $p\leqslant 10$ 提供这些图解，它们也在[HP21]中给出。有给定数目的点的树的次序是有点任意的。但是一般地说，它们按照度大于 2 的点的数目增加的次序排列。对于 $p\leqslant 26$，有 p 个点的树和有根树的数目（参见赖尔顿[R15, p. 138]）和 $p\leqslant 12$ 的么树和同胚不可约树的数目（参见[HP20]）在下列表中提供。这些数目分别利用公式(15.41)，(15.35)，(15.51 和 15.52)和(15.47, 15.48 和 15.49)得到。

表 A3 有 p 个点的树、有根树、么树和同胚不可约树的数目 t_p、T_p、i_p、h_p

p	t_p	T_p	i_p	h_p	p	t_p	T_p
1	1	1	1	1	13	1 301	12 486
2	1	1	0	1	14	3 159	32 973
3	1	2	0	0	15	7 741	87 811
4	2	4	0	1	16	19 320	235 381
5	3	9	0	1	17	48 629	634 847
6	6	20	0	2	18	123 867	1 721 159
7	11	48	1	2	19	317 955	4 688 676
8	23	115	1	4	20	823 065	12 826 228
9	47	286	3	5	21	2 144 505	35 221 832
10	106	719	6	10	22	5 623 756	97 055 181
11	235	1842	15	14	23	14 828 074	268 282 855
12	551	4766	29	26	24	39 299 897	743 724 984
					25	104 636 890	2 067 174 645
					26	279 793 450	5 759 636 510


p=1
p=2
p=3
p=4
p=5
p=6
p=7
p=8
p=9


p=10

文 献 目 录

越积越厚，
越来越多，
越来越快。
——L·卡洛尔

想在下面列出的是，而且仅仅是，那些曾经在正文中引用过的参考资料。然而要注意，较之特纳[T5]所编的关于图论及其应用的极其详尽的资料目录，本目录是大大地经过精选了的。为了方便读者，仿照格伦鲍姆[G10]的颇用心意的做法，本目录在每篇文献的后面用方括号中填以数字，用来指出这篇文献在本书正文中被提到的页码。按照《数学评论》(*Mathematical Reviews*)的惯例，所有的书都在前面标以 * 号*。

Anderson, S. S.

[AH1] (with F. Harary), Trees and unicyclic graphs. *Math. Teacher* **60** (1967), 345～348. [49]

Bäbler, F.

[B1] Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen. *Comment. Math. Helv.* **27** (1953), 81～100. [81]

Balaban, A. T.

[B2] Valence-isomerism of cyclopolyenes. *Rev. Roumaine Chim.* **11** (1966), 1097～1116. [73]

Ball, W. W. R.

* [BC1] (with H. S. M. Coxeter), *Mathematical Recreations and Essays*. Macmillan, New York, 1947. [4]

Barnette, D.

[B3] Trees in polyhedral graphs. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 731～736. See also p. 79. [143]

---

* 一个出版商为一本三角学的课本做广告说："这本书在《数学评论》中是加了星号的"。

Battle, J.

[BHK1] (with F. Harary and Y. Kodama), Every planar graph with nine points has a nonplanar complement. *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 569～571. [125]

[BHKY1] (with F. Harary, Y. Kodama, J. W. T. Youngs), Additivity of the genus of a graph. *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 565～568. [138]

Behzad, M.

[B4] A criterion for the planarity of a total graph. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **63** (1967), 679～681. [83,95,143]

[BC2] (with G. Chartrand), Total graphs and traversability. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **15** (1966), 117～120. [97]

[BC3] (with G. Chartrand), No graph is perfect. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 962～963. [73]

[BCC1] (with G. Chartrand and J. Cooper), The colour numbers of complete graphs. *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 226～228. [171]

[BCN1] (with G. Chartrand and E. A. Nordhaus), Triangles in line-graphs and total graphs. *Indian J. Math.* (to appear). [97]

[BR1] (with H. Radjavi), The line analog of Ramsey numbers. *Israel J. Math.* **5** (1967), 93～96. [96]

Beineke, L. W.

[B5] Decompositions of complete graphs into forests. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.* **9** (1964), 589～594. [106]

[B6] The decomposition of complete graphs into planar subgraphs. Chapter 4 in *Graph Theory and Theoretical Physics* (F. Harary, ed.) Academic Press, London, 1967, pp. 139～154. [139]

[B7] Complete bipartite graphs: decomposition into planar subgraphs. Chapter 7 in *A Seminar in Graph Theory* (F. Harary, ed.) Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967, pp. 42～53. [139]

[B8] Derived graphs and digraphs. *Beiträge zur Graphentheorie* (H. Sachs, H. Voss, and H. Walther, eds.) Teubner, Leipzig, 1968, pp. 17～33. [83,86]

[BG1] (with R. K. Guy), The coarseness of $K_{m,n}$. *Canad. J. Math.* (to appear). [140,144]

[BH1] (with F. Harary), Local restrictions for various classes of directed graphs. *J. London Math. Soc.* **40** (1965), 87～95. [243]

[BH2] (with F. Harary), Inequalities involving the genus of a graph and its thickness. *Proc. Glasgow Math. Assoc.* **7** (1965), 19～21. [136,144]

[BH3] (with F. Harary), The genus of the n-cube. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 494～496. [138]

[BH4] (with F. Harary), The maximum number of strongly connected subtournaments. *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 491～498. [241]

[BH5] (with F. Harary), The thickness of the complete graph. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 850～859. [139]

[BH6] (with F. Harary), The connectivity function of a graph. *Mathematika* **14** (1967), 197～202. [53,60]

[BHM1] (with F. Harary and J. W. Moon), On the thickness of the complete bipartite graph. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 1～5. [139]

[BHP1] (with F. Harary and M. D. Plummer), On the critical lines of a graph. *Pacific J. Math.* **22** (1967), 205～212. [114]

[BM1] (with J. W. Moon), The number of labelled k-trees. *Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary, ed.) Academic Press, New York, 1969. [227]

[BP1] (with R. E. Pippert), The enumeration of labelled k-dimensional trees. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [227]

[BP2] (with M. D. Plummer), On the 1-factors of a nonseparable graph. *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 285～289. [99,107]

See also [GB1].

Benzer, S.

[B9] On the topology of the genetic fine structure. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **45** (1959), 1607～1620. [24]

Berge, C.

[B10] Two theorems in graph theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **43** (1957), 842～844. [112]

* [B11] *Théorie des Graphes et ses Applications*. Dunod, Paris, 1958. [53]

* [B12] *The Theory of Graphs and its Applications*. Methuen, London, 1962. [25,112,117,147,233]

* [BG2] (with A. Ghouila-Houri), *Programming, Games, and Transportation Networks*. Methuen, London, 1965. [7]

Binet, J. P. M. See p. 177.

Birkhoff, G.

* [B13] *Lattice Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25, Third Edition, Providence, 1967. [64]

Birkhoff, G. D.

[BL1] (with D. Lewis), Chromatic polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **60** (1946), 355～451. [166]

Boland, J.

[BL2] (with C. Lekkerkerker), Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fund. Math.* **51** (1962), 45～64. [24]

Bollobás, B.

[B14] On graphs with at most three independent paths connecting any two vertices. *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 137～140. [65,66]

Bondy, J. A.

[B15] On Kelly's congruence theorem for trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **65** (1969), 1～11. [48]

See also p. 171.

Bosak, J. See p. 79.

Bott, R.

[BM2] (with J. P. Mayberry), Matrices and trees. *Economic activity analysis*. (O. Morgenstern, ed.) New York, Wiley, 391～400. [236]

Brooks, R. L.

[B16] On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37** (1941), 194～197. [147]

[BSST1] (with C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte), The dissection of rectangles into squares. *Duke Math. J.* **7** (1940), 312～340. [183] See also p. 142.

Brualdi, R. A.

[B17] Kronecker products of fully indecomposable matrices and of ultrastrong digraphs, *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 135～139. [25]

deBruijn, N. G.

[B18] Generalization of Pólya's fundamental theorem in enumeration combinatorial analysis. *Indagationes Math.* **21** (1959), 59～69. [222]

[B19] Pólya's theory of counting. *Applied Combinatorial Mathematics* (E. F. Beckenbach, ed.) Wiley, New York, 1964, pp. 144～184. [222]

[BE1] (with T. van Aardenne-Ehrenfest), Circuits and trees in oriented graphs. *Simon Stevin* **28** (1951), 203～217. [227, 237, 244]

Burnside, W.

* [B20] *Theory of Groups of Finite Order* (second edition) Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911. [228]

Cameron, J. See p. 25.

Camion, P.

[C1] Chemie et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959), 2151～2152. [240]

Carlitz, L.

[CR1] (with J. Riordan), The number of labelled two-terminal series-parallel networks. *Duke Math. J.* **23** (1955), 435～445. [227]

Cartwright D.

[CH1] (with F. Harary), The number of lines in a digraph of each connectedness category. *SIAM Review* **3** (1961), 309～314. [242]

[CH2] (with F. Harary), On colorings of signed graphs. *Elem. Math.* **23** (1968), 85～89. [159, 171] See also [HNC1].

Cauchy, A. L. See p. 177.

Cayley, A.

[C2] On the theory of the analytical forms called trees. *Philos. Mag.* **13** (1857), 19～30. *Mathematical Papers*, Cambridge **3** (1891), 242～246. [3, 217]

[C3] On the mathematical theory of isomers. *Philos. Mag.* **67** (1874), 444～446. *Mathematical Papers*, Cambridge **9** (1895), 202～204. [4]

[C4] The theory of groups, graphical representation. *Mathematical Papers*, Cambridge **10** (1895), 26～28. [194]

[C5] On the analytical forms called trees. *Amer. Math. J.* **4** (1881), 266

~268. *Mathematical Papers*, Cambridge **11** (1896), 365~367. [218]

[C6] A theorem on trees. *Quart. J. Math.* **23** (1889), 376~378. *Mathematical Papers*, Cambridge **13** (1897), 26~28. [207,225]

Chang, L. C.

[C7] The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association scheme. *Sci. Record* **3** (1959), 604~613. [92]

Chartrand, G.

[C8] A graph-theoretic approach to a communications problem. *J. SIAM Appl. Math.* **14** (1966), 778~781. [52]

[C9] On Hamiltonian line graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear). [94]

[CG1] (with D. Geller), Uniquely colorable planar graphs. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [159,161,171]

[CGH1] (with D. Geller and S. Hedetniemi), A generalization of the chromatic number. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968), 265~271. [172]

[CGH2] (with D. Geller and S. Hedetniemi), Graphs with forbidden subgraphs. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [30,117,143]

[CH3] (with F. Harary), Planar permutation graphs. *Ann. Inst. Henri Poincaré Sec.* B **3** (1967), 433~438. [125,202,205]

[CH4] (with F. Harary), Graphs with prescribed connectivities. *Theory of Graphs* (P. Erdös and G. Katona, eds.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 61~63. [52]

[CKK1] (with S. F. Kapoor and H. V. Kronk), The Hamiltonian hierarchy. (to appear). [82]

[CKL1] (with A. Kaugars and D. R. Lick), Critically n-connected graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* (submitted). [66]

[CK1] (with H. V. Kronk), Randomly traceable graphs. *J. SIAM Appl. Math.* (to appear). [81]

[CS1] (with M. J. Stewart), The connectivity of line-graphs. *Math. Ann.* (submitted). [97]

See also [BC2], [BC3], [BCC1], [BCN1], [KC1], and p. 90.

Cooper, J. See [BCC1].

Courant, R.

* [CR1] (with H. E. Robbins) *What is Mathematics?* Oxford U. Press, London, 1941. [136]

Coxeter, H. S. M.

[C10] Self-dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* **56** (1950), 413~455. [202]

See also [BC1].

Crowe, D. W. See p. 247.

Danzer, L.

[DK1] (with V. Klee), Lengths of snakes in boxes. *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 258~265. [30]

Dauber, E. See p. 198.

Davis, R. L.

[D1] The number of structures of finite relations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 486~495. [226,227]

[D2] Structures of dominance relations. *Bull. Math. Biophys.* **16** (1954), 131~140. [227]

Descartes, B.

[D3] Solution to advanced problem no. 4526. *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 352. [148]

Dilworth, R. P.

[D4] A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. Math.* **51** (1950), 161~166. [64]

Dirac, G. A.

[D5] A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.* **27** (1952), 85~92. [156,162]

[D6] Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 3, **2** (1952), 69~81. [79,163]

[D7] The structure of k-chromatic graphs. *Fund. Math.* **40** (1953), 42~55. [148,163]

[D8] 4-chrome Graphen und vollständige 4-Graphen. *Math. Nachr.* **22** (1960), 51~60. [54]

[D9] In abstrakten Graphen verhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen. *Math. Nachr.* **22** (1960), 61~85. [171]

[D10] Généralisations du théorème de Menger. *C. R. Acad. Sci. Paris* **250** (1960), 4252~4253. [59]

[D11] Short proof of Menger's graph theorem. *Mathematika* **13** (1966), 42~44. [56]

[D12] On the structure of k-chromatic graphs. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **63** (1967), 683~691. [171]

[DS1] (with S. Schuster), A theorem of Kuratowski. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* Ser. **A 57** (1954), 343~348. [126]

Dulmage, A. L.

[DM1] (with N. S. Mendelsohn), Coverings of bipartite graphs. *Canad. J. Math.* **10** (1958), 517~534. [114,116]

[DM2] (with N. S. Mendelsohn), On the inversion of sparse matrices. *Math. Comp.* **16** (1962), 494~496. [238]

[DM3] (with N. S. Mendelsohn), Graphs and matrices. Chapter 6 in *Graph Theory and Theoretical Physics* (F. Harary, ed.) Academic Press, London, 1967, pp. 167~229. [244,245]

Edmonds, J.

[E1] Existence of k-edge connected ordinary graphs with prescribed degrees. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Sect. **B 68** (1964), 73~74. [74]

Ehrenfest, T. van Aardenne-. See [BE1].

Elias, P.

[EFS1] (with A. Feinstein and C. E. Shannon), A note on the maximum flow through a network. *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-2, (1956), 117～119. [58]

Erdős, P.

[E2] Graph theory and probability II. *Canad. J. Math.* **13** (1961), 346～352. [148]

[E3] Extremal problems in graph theory. Chapter 8 of *A Seminar on Graph Theory* (F. Harary, ed.) Holt, Rinehart and Winston, New York. 1967, pp. 54～59. [19, 21, 29]

[E4] Applications of probabilistic methods to graph theory. Chapter 9 in *A Seminar on Graph Theory* (F. Harary, ed.) Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967, pp. 60～64. [29]

[EG1] (with T. Gallai), Graphs with prescribed degrees of vertices (Hungarian). *Mat. Lapok* **11** (1960), 264～274. [68, 29]

[EGP1] (with A. Goodman and L. Pósa), The representation of a graph by set intersections. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 106～112. [23]

[EH1] (with A. Hajnal), On chromatic numbers of graphs and set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **17** (1966), 61～99. [170]

[ER1] (with A. Rényi), Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 295～315. [20]

[ES1] (with G. Szekeres), A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.* **2** (1935), 463～470. [18]

See also p. 140.

Euler, L.

[E5] Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae* **8** (1736), 128～140. *Opera Omnia Series* I-7 (1766), 1～10. [2]

[E6] The Königsberg bridges. *Sci. Amer.* **189** (1953), 66～70. [16]

See also p. 75 and 120.

Evans, J. W.

[EHL1] (with F. Harary and M. S. Lynn), On the computer enumeration of finite topologies. *Comm. Assoc. Comp. Mach.* **10** (1967), 295～298. [227]

Fagen, R. E. See [AFPR1].

Fáry, I.

[F1] On straight line representation of planar graphs. *Acta Sci. Math. Szeged.* **11** (1948), 229～233. [123]

Feinstein, A. See [EFS1].

Feller, W.

* [F2] *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 1, (2nd ed.) Wiley, New York, 1957. [7]

Feynmann, R. P.

[F3] Space-time approaches to quantum electrodynamics. *Physical Review* **76** (1949), 769～789. [7]

Finck, H. J.

[F4] Über die chromatischen Zahlen eines Graphen und Seines Komplements, I and II. *Wiss. Z. T. H. Ilmenau* **12** (1966), 243～251. [170]

[FS1] (with H. Sachs), Über eine von H. S. Wilf angegebene Schranke für die chromatische Zahl endlicher Graphen. *Math. Nachr.* **39** (1969), 373～386. [152]

Folkman, J.

[F5] Regular line-symmetric graphs. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [199]

Ford, G. W.

[FNU1] (with R. Z. Norman and G. E. Uhlenbeck), Combinatorial problems in the theory of graphs, II. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42** (1956), 529～535. [227]

Ford, L. R.

[FF1] (with D. R. Fulkerson), Maximal flow through a network, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 399～404. [58]

* [FF2] (with D. R. Fulkerson), *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, 1962. [7, 61]

Foster, R. M.

[F6] Geometrical circuits of electrical networks. *Trans. Amer. Inst. Elec. Engrs.* **51** (1932), 309～317. [197]

Foulkes, J. D.

[F7] Directed graphs and assembly schedules. *Proc. Symp. Appl. Math.*, Amer. Math. Soc. **10** (1960), 281～289. [240]

Frucht, R.

[F8] Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe. *Compositio Math.* **6** (1938), 239～250. [194]

[F9] Graphs of degree three with a given abstract group. *Canad. J. Math.* **1** (1949), 365～378. [196]

[F10] On the groups of repeated graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 418～420. [191]

[F11] A one-regular graph of degree three. *Canad. J. Math.* **4** (1952), 240～247. [202]

[FH1] (with F. Harary), On the corona of two graphs. *Aequationes Math.* (to appear). [194]
See also p. 195.

Fulkerson, D. R.

[F12] Zero-one matrices with zero trace. *Pacific J. Math.* **10** (1960), 831～836. [243]

[F13] Networks, frames, and blocking systems. *Mathematics of the Decision Sciences*. Vol. II, Lectures in Applied Mathematics, (G. B. Dantzig and A. F. Scott, eds.) 303～334. [61]
See also [FF1], and [FF2].

Gaddum, J. W. See [NG1].

Gallai, T.

[G1] On factorisation of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1** (1950) 133~153. [100]

[G2] Über extreme Punkt- und Kantenmengen. *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Eotvös Sect. Math. **2** (1959), 133~138. [110]

[G3] Elementare relationen bezuglich der glieder und trennenden punkte von graphen. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.* **9** (1964), 235~236. [37,44]

[G4] On directed paths and circuits. *Theory of Graphs* (P. Erdös and G. Katona, eds.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. Also Academic Press, New York, 1968, pp. 115~119. [172,245]

[GM1] (with A. N. Milgram), Verallgemeinerung eines graphen theoretischen Satzes von Rédei, *Acta Scient. Math.* **21** (1960), 181~186. [240]

See also [EG1].

Gaudin, T.

[GHR1] (with J. C. Herz and P. Rossi), Solution du problème no. 29. *Rev. Franc. Rech. Oper.* **8** (1964), 214~218. [82]

Geller, D. P.

[G5] Outerplanar graphs. (to appear). [126]

[GH1] (with F. Harary), Arrow diagrams are line digraphs. *J. SIAM Appl. Math.* **16** (1968), 1141~1145. [243]

See also [CG1], [CGH1], [CGH2], and p. **97**.

Gorencsér, L.

[G6] On coloring problems (Hungarian). *Mat. Lapok* **16** (1965), 274~277. [118]

Gewirtz, A.

[GQ1] (with L. V. Quintas), Connected extremal edge graphs having symmetric automorphism group. *Recent Progress in Combinatorics* (W. T. Tutte, ed.) Academic Press, New York, 1969. [203]

Ghouila-Houri, A.

[G7] Un résultat relatif à la notion de diamétre. *C. R. Acad. Sci. Paris* **250** (1960), 4254~4256. [244]

See also [BG2].

Gilbert, E. N.

[GR1] (with J. Riordan), Symmetry types of periodic sequences. *Illinois J. Math.* **5** (1961), 657~665. [227]

Gilmore, P.

[GH2] (with A. J. Hoffman), A characterization of comparability graphs and interval graphs. *Canad. J. Math.* **16** (1964), 539~548. [24]

Goodman, A. See [EGP1].

Graver, J. E.

[GY1] (with J. Yackel), Some graph theoretic results associated with

Ramsey's theorem. *J. Combinatorial Theory* **4** (1968), 125～175. [19]

Grossman, J. W. See [HG1].

Grötzsch, H.

[G8] Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg. Math. Naturwiss. Reihe* **8** (1958), 109～120. [151]

Grünbaum, B.

[G9] Grötzsch's theorem on 3-colorings. *Michigan Math. J.* **10** (1963), 303～310. [151]

[G10] *Convex Polytopes*, Wiley (Interscience), New York, 1967. See also p. 245. [79,136,268]

Gupta, R. P.

[G11] Independence and covering numbers of line graphs and total graphs. *Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary, ed.) Academic Press, New York, 1969. [113]

Guy, R. K.

* [G12] The decline and fall of Zarankiewicz's theorem. *Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary, ed.) Academic Press, New York, 1969. [142]

[GB1] (with L. W. Beineke), The coarseness of the complete graph. *Canad. J. Math.* **20** (1966), 888～894. [140]
See also [BG1].

Hadwiger, H.

[H1] Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich* **88** (1943), 133～142. [156]

Hajnal, A. See [EH1].

Hajös, G.

[H2] Über eine Art von Graphen. *Internat. Math. Nachr.* **2** (1957), 65. [24]

[H3] Über eine Konstruktion nicht n-färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe.* **10** (1961), 116～117. [165]

Hakimi, S.

[H4] On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *J. SIAM Appl. Math.* **10** (1962), 496～506. [68,73,74]

Halin, R.

[H5] A theorem on *n*-connected graphs. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [66]

Hall, D. W.

[H6] A note on primative skew curves. *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943), 935～937. [142]

Hall, M.

* [H7] *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, 1967. [18,66]

Hall, P.

[H8] On representations of subsets. *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 26～30. [63]

Hamelink, R. C.

[H9] A partial characterization of clique graphs. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [23]

Harary, F.

[H10] On the notion of balance of a signed graph. *Mich. Math. J.* **2** (1953), 143～146. [226]

[H11] The number of linear, directed, rooted, and connected graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **78** (1955), 445～463. [215,216,226]

[H12] Note on the Pólya and Otter formulas for enumerating trees. *Mich. Math. J.* **3** (1956), 109～112. [219]

[H13] On the number of dissimilar line-subgraphs of a given graph. *Pacific J. Math.* **6** (1956), 57～64. [226]

[H14] The number of dissimilar supergraphs of a linear graph. *Pacific J. Math.* **7** (1957), 903～911. [226]

[H15] Structural duality. *Behavioral Sci.* **2** (1957), 255～265. [36]

[H16] The number of oriented graphs. *Mich. Math. J.* **4** (1957), 221～224. [227]

[H17] On arbitrarily traceable graphs and directed graphs. *Scripta Math.* **23** (1957), 37～41. [81]

[H18] On the number of bicolored graphs. *Pacific J. Math.* **8** (1958), 743～755. [189,204]

[H19] On the number of dissimilar graphs between a given graph-subgraph pair. *Canad. J. Math.* **10** (1958), 513～516. [226]

[H20] Status and contrastatus. *Sociometry* **22** (1959), 23～43. [244]

[H21] On the group of the composition of two graphs. *Duke Math. J.* **26** (1959), 29～34. [25,193]

[H22] An elementary theorem on graphs. *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 405～407. [37]

[H23] The number of functional digraphs. *Math. Ann.* **138** (1959), 203～210. [227]

[H24] Unsolved problems in the enumeration of graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960), 63～95. [223]

[H25] A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning. *Numer. Math.* **4** (1962), 128～135. [238]

[H26] The maximum connectivity of a graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **48** (1962), 1142～1146. [53]

[H27] The determinant of the adjacency matrix of a graph. *SIAM Review* **4** (1962), 202～210. [175]

[H28] A characterization of block-graphs. *Canad. Math. Bull.* **6** (1963), 1～6. [35]

[H29] On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs.

Theory of Graphs and its Applications (M. Fiedler, ed.). Prague, 1964, 47~52; reprinted, Academic Press, New York, 1964. [14,48]

[H30] Combinatorial problems in graphical enumeration. *Applied Combinatorial Mathematics* (E. F. Beckenbach, ed.) Wiley, New York, 1964, pp. 185~220. [223]

[H31] Applications of Pólya's theorem to permutation groups. Chapter 5 in *A Seminar on Graph Theory* (F. Harary, ed.) Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967, pp. 25~33. [213,214,215,226]

[H32] Graphical enumeration problems. Chapter 1 in *Graph Theory and Theoretical Physics* (F. Harary, ed.) Academic Press, London, 1967, pp. 1~41. [223,225]

[H33] Variations on a theorem by Menger. *J. SIAM Appl. Math.* (to appear). [64]

[HH1] (with S. Hedetniemi), The achromatic number of a graph. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [147,166]

[HHP1] (with S. Hedetniemi and G. Prins), An interpolation theorem for graphical homomorphisms. *Port. Math.* (to appear). [165,166,172]

[HHR1] (with S. T. Hedetniemi and R. W. Robinson), Uniquely colorable graphs. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [160,171]

[HKT1] (with R. M. Karp and W. T. Tutte), A criterion for planarity of the square of a graph. *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 395~405. [143]

[HK1] (with Y. Kodama), On the genus of an n-connected graph. *Fund. Math.* **54** (1964), 7~13. [54,138]

[HM1] (with B. Manvel), On the number of cycles in a graph. *Math. časopis* (to appear). [30,182]

[HM2] (with L. Moser), The theory of round robin tournaments. *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), 231~246. [240,241,246]

[HMR1] (with A. Mowshowitz and J. Riordan), Labeled trees with unlabeled endpoint. *J. Combinatorial Theory* **6** (1969), 60~64. [225]

[HN1] (with C. St. J. A. Nash-Williams), On Eulerian and Hamiltonian graphs and line-graphs. *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 701~709. [94,97]

[HN2] (with R. Z. Norman), The dissimilarity characteristic of Husimi trees. *Ann. of Math.* **58** (1953), 134~141. [49,227]

[HN3] (with R. Z. Norman), Dissimilarity characteristic theorems for graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 332~334. [229]

[HN4] (with R. Z. Norman), Some properties of line digraphs. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **9** (1961), 161~168. [243]

* [HNC1] (with R. Z. Norman and D. Cartwright), *Structural Models: an introduction to the theory of directed graphs.* Wiley, New York, 1965. [7,230]

[HP1] (with E. M. Palmer), The number of graphs rooted at an oriented line. *ICC Bull.* **4** (1965), 91~93. [226]

[HP2] (with E. M. Palmer), A note on similar points and similar lines of a graph. *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* **10** (1965), 1489～1492. [203]

[HP3] (with E. M. Palmer), The smallest graph whose group is cyclic. *Czech. Math. J.* **16** (1966), 70～71. [196,202]

[HP4] (with E. M. Palmer), On the number of orientations of a given graph. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **14** (1966), 125～128. [227]

[HP5] (with E. M. Palmer), On similar points of a graph. *J. Math. Mech.* **15** (1966), 623～630. [198]

[HP6] (with E. M. Palmer), The reconstruction of a tree from its maximal proper subtrees. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 803～810. [48]

[HP7] (with E. M. Palmer), Enumeration of locally restricted digraphs. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 853～860. [227]

[HP8] (with E. M. Palmer), The power group enumeration theorem. *J. Combinatorial Theory* **1** (1966), 157～173. [222]

[HP9] (with E. M. Palmer), Enumeration of self-converse digraphs. *Mathematika* **13** (1966), 151～157. [227]

[HP10] (with E. M. Palmer), The groups of the small digraphs. *J. Indian Statist. Assoc.* **4** (1966), 155～169. [203]

[HP11] (with E. M. Palmer), The enumeration methods of Redfield. *Amer. J. Math.* **89** (1967), 373～384. [206]

[HP12] (with E. M. Palmer), Enumeration of finite automata. *Information and Control* **10** (1967), 499～508. [224,227]

[HP13] (with E. M. Palmer), On the number of balanced signed graphs. *Bull. Math. Biophysics* **29** (1967), 759～765. [226]

[HP14] (with E. M. Palmer), On the group of a composite graph. *Studia Sci. Math. Hungar.* **3** (to appear). [25]

[HP15] (with E. M. Palmer), On the point-group and line-group of a graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **19** (1968), 263～269. [188,204]

[HP16] (with E. M. Palmer), Note on the number of forests. *Mat. Časopis* (to appear). [226]

[HP17] (with E. M. Palmer), On acyclic simplicial complexes. *Mathematika* **15** (1968), 119～122. [227]

[HPR1] (with E. M. Palmer and R. C. Read), The number of ways to label a structure. *Psychometrika* **32** (1967), 155～156. [208]

[HP18] (with M. D. Plummer), On the point-core of a graph. *Math. Z.* **94** (1966), 382～386. [118]

[HP19] (with M. D. Plummer), On the core of a graph. *Proc. London Math. Soc.* **17** (1967), 305～314. [114,116,118]

[HP20] (with G. Prins), The number of homeomorphically irreducible trees, and other species. *Acta Math.* **101** (1959), 141～162. [219,265]

[HP21] (with G. Prins), Enumeration of bicolourable graphs. *Canad. J. Math.* **15** (1963), 237～248. [226]

[HP22] (with G. Prins), The block-cutpoint-tree of a graph. *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 103~107. [44,227]

[HPT1] (with G. Prins and W. T. Tutte), The number of plane trees. *Indagationes Math.* **26** (1964), 319~329. [225]

[HR1] (with R. C. Read), The probability of a given 1-choice structure. *Psychometrika* **31** (1966), 271~278. [208]

[HR2] (with I. C. Ross), A description of strengthening and weakening group members. *Sociometry* **22** (1959), 139~147. [243]

[HT1] (with C. A. Trauth, Jr.), Connectedness of products of two directed graphs. *J. SIAM Appl. Math.* **14** (1966), 250~254. [25,242,244]

[HT2] (with W. T. Tutte), The number of plane trees with a given partition. *Mathematika* **11** (1964), 99~101. [225]

[HT3] (with W. T. Tutte), A dual form of Kuratowski's theorem. *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 17~20, 373. [131]

[HT4] (with W. T. Tutte), On the order of the group of a planar map. *J. Combinatorial Theory* 1 (1966), 394~395. [204]

[HU1] (with G. E. Uhlenbeck), On the number of Husimi trees, I. *Proc. Nat. Acad. Sci., USA* **39** (1953), 315~322. [227]

[HW1] (with G. Wilcox), Boolean operations on graphs. *Math. Scand.* **20** (1967), 41~51. [25]

See also [AH1], [BEK1], [BHKY1], [BH1], [BH2], [BH3], [BH4], [BH5], [BH6], [BHM1], [BHP1], [CH1], [CH2], [CH3], [CH4], [EHL1], [FH1], [GH1], and p. 184, 243 and 244.

Harrison, M. A.

[H34] A census of finite automata. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 100~113. [224,227]

[H35] Note on the number of finite algebras. *J. Combinatorial Theory* **1** (1966), 394. [227]

Havel, V.

[H36] A remark on the existence of finite graphs (Hungarian). *Časopis Pěst. Mat.* **80** (1955), 477~480. [68]

[H37] On the completeness-number of a finite graph. *Beiträge zur Graphentheorie* (H. Sachs, H. Voss, and H. Walther, eds.) Teubner, Leipzig, 1968, pp. 71~74. [171]

Heawood, P. J.

[H38] Map colour theorems. *Quart. J. Math.* **24** (1890), 332~338. [5]

Hedetniemi, S.

[H39] On hereditary properties of graphs. *Studia Sci. Math. Hungar.* (to appear). [111,117]

See also [CGH1], [CGH2], [HH1], [HHP1], [HHR1], and p. 161 and 170.

Hedrlin, Z.

[HP23] (with A. Pultr), Symmetric relations (undirected graphs) with given semigroup. *Monatsh. Math.* **69** (1965), 318~322. [205]

[HP24] (with A. Pultr), On rigid undirected graphs. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 1237～1242. [205]

Heffter, L

[H40] Über das Problem der Nachbargebiete. *Ann. Math.* **38** (1891), 477～508. [156]

Hemminger, R. L.

[H41] On reconstructing a graph. *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 185～187. [96]

Herz, J. C. See [GHR1].

Heuchenne, C.

[H42] Sur une certaine correspondance entre graphes. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **33** (1964), 743～753. [243]

Hobbs, A. M.

[HG1] (with J. W. Grossman), Thickness and connectivity in graphs. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* Sect. B (to appear). [139]

Hoffman, A. J.

[H43] On the uniqueness of the triangular association scheme. *Ann. Math. Statist.* **31** (1960), 492～497. [20,92]

[H44] On the exceptional case in a characterization of the arcs of complete graphs. *IBM J. Res. Develop.* **4** (1960), 487～496. [92]

[H45] On the polynomial of a graph. *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), 30～36. [184,244]

[H46] On the line-graph of the complete bipartite graph. *Ann. Math. Statist.* **35** (1964), 883～885. [83,92]

[HS1] (with R. R. Singleton), On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM J. Res. Develop.* **4** (1960), 497～504. [30]

See also [GH2].

House, L. C.

[H47] A k-critical graph of given density. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 829～831. [171]

Izbicki, H.

[I1] Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften. *Monatsh. Math.* **63** (1959), 298～301. [197]

Jean, M.

[J1] Edge-similar tournaments. *Recent Progress in Combinatorics* (W. T. Tutte, ed.). Academic Press, New York, 1969. [246]

Jordan, C.

[J2] Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math.* **70** (1869), 185～190. [42]

See also p. 41.

Jung, H. A.

[J3] Zu einem Isomorphiesatz von Whitney für Graphen. *Math. Ann.* **164** (1966), 270～271. [84]

Kagno, I. N.

[K1] Linear graphs of degree ≤6 and their groups. *Amer. J. Math.* **68** (1946), 505~520; **69** (1947), 872; **77** (1955), 392. [203]

Kapoor, S. F. See [CKK1].

Karaganis, J. J.

[K2] On the cube of a graph. *Canad. Math. Bull.* (to appear). [81]

Karp, R. M. See [HKT1].

Kasteleyn, P. W.

[K3] A soluble self-avoiding walk problem. *Physica* **29** (1963), 1329~1337. [243]

[K4] Graph theory and crystal physics. Chapter 2 in *Graph Theory and Theoretical Physics* (F. Harary, ed.) Academic Press, London, 1967, pp. 44~110. [83,237]

Kaugars, A. See [CKL1] and p. 37.

Kay, D. C.

[KC1] (with G. Chartrand), A characterization of certain ptolemaic graphs. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 342~346. [28]

Kelly, J. B.

[KK1] (with L. M. Kelly), Paths and circuits in critical graphs. *Amer. J. Math.* **76** (1954), 786~792. [148,163]

Kelly, L. M. See [KK1].

Kelly, P. J.

[K5] A congruence theorem for trees. *Pacific J. Math.* **7** (1957), 961~968. [48]

[KM1] (with D. Merriell), A class of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), 488~492. [30]

Kempe, A. B.

[K6] On the geographical problem of four colors. *Amer. J. Math.* **2** (1879), 193~204. [5]

Kendall, M. G.

[KS1] (with B. B. Smith), On the method of paired comparisons. *Biometrika* **31** (1940), 324~345. [241]

King, C. See p. 184 and 244.

Kirchhoff, G.

[K7] Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Strome geführt wird. *Ann. Phys. Chem.* **72** (1847), 497~508. [2,176,245]

Klee, V. See [DK1].

Kleinert, M.

[K8] Die Dicke des n-dimensionalen Würfel-Graphen. *J. Combinatorial Theory* **3** (1967), 10~15. [140]

Kleitman, D. See p. 142.

Kodama, Y. See [BHK1], [BHKY1], and [HK1].

König, D.

[K9] Graphen und Matrizen. *Mat. Fiz. Lapok* **38** (1931), 116~119. [62,111]

* [K10] *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig, 1936, Reprinted Chelsea, New York, 1950. [4,8,20,41,98,146,194]
See also p. 135.

Kotzig, A.
[K11] On certain decompositions of a graph (in Slovakian). *Mat.-Fyz. Časopis* **5** (1955), 144~151.
See also p. 58 and 144.

Krausz, J.
[K12] Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les réseaux. *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943), 75~89. [86]

Kronk, H. V.
[K13] Generalization of a theorem of Pósa. *Proc. Amer. Math. Soc.* [82]
See also [CKK1] and [CK1].

Kuratowski, K.
[K14] Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.* **15** (1930), 271~283. [126]

Landau, H. G.
[L1] On dominance relations and the structure of animal societies, III; the condition for a score structure. *Bull. Math. Biophys.* **15** (1955), 143~148. [240,246]

Lawes, P. See p. 227.

Lederberg, J. See p. 79.

Lee, T. D.
[LY1] (with C. N. Yang), Many-body problems in quantum statistical mechanics. *Phys. Rev.* **113** (1959), 1165~1177. [7]

Lekkerkerker, C. See [BL8].

Lewis, D. See [BL1].

Lewin, K.
* [L2] *Principles of Topological Psychology,* McGraw-Hill, New York, 1936. [6]

Lick, D. R. See [CKL1].

Littlewood, J. E.
* [L3] *The Theory of Group Characters.* Clarendon, Oxford, 1940. [189]

Lovász, L.
[L4] On decomposition of graphs. *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 237~238. [74]
[L5] On chromatic number of finite set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **19** (1968), 59~67. [148]

Lynn, M. S. See [EHL1].

MacLane, S.
[M1] A structural characterization of planar combinatorial graphs. *Duke Math. J.* **3** (1937), 340~472. [134]

Manvel, B.
[M2] Reconstruction of trees. *Canad. J. Math.* (to appear) [49]

[M3] Reconstruction of unicyclic graphs. *Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary. ed.) Academic Press, New York, 1969. [49]
See also [HM1].

Marczewski, E.

[M4] Sur deux propriétés des classes d'ensembles. *Fund. Math.* **33** (1945), 303~307. [22]

May, K. O.

[M5] The origin of the four-color conjecture. *Isis* **56** (1965), 346~348. [5]

Mayberry, J. P. See [BM2].

Mayer, J.

[M6] Le problème des regions voisines sur les surfaces closes orientables. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [137]
See also p. 139.

McAndrew, M. H.

[M7] On the product of directed graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 600~606. [25,244]

[M8] The polynomial of a directed graph. *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 303~309. [204]

Meetham, A. R.

Mendelsohn, N. S. See [DM1], [DM2], and [DM3].

Menger, K.

[M9] Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.* **10** (1927), 96~115. [55]

Menon, V.

[M10] On repeated interchange graphs. *Amer. Math. Monthly* **13** (1966), 986~989. [83]

Meriwether, R. L. See p. 203.

Merriell, D. See [KM1].

Milgram, A. N. See [GM1].

Miller, D. J.

[M11] The categorical product of graphs. *Canad. J. Math.* **20** (1968), 1511~1521. [30]

Minty, G.

[M12] On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network-programming. *J. Math. Mech.* **15** (1966), 485~520. [48]

Mirsky, L.

[MP1] (with H. Perfect), Systems of representatives. *J. Math. Anal. Appl.* **15** (1966), 520~568. [14]

Moon, J.

[M13] On the line-graph of the complete bigraph. *Ann. Math. Statist.* **34** (1963), 664~667. [92]

[M14] An extension of Landau's theorem on tournaments. *Pacific J. Math.*

13 (1963), 1343~1345. [246]

[M15] Various proofs of Cayley's formula for counting trees. Chapter 11 in *A Seminar on Graph Theory* (F. Harary, ed.) Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967, pp. 70~78. [178, 207, 225]

* [M16] *Topics on Tournaments*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968. [227, 230, 246]

[MM1] (with L. Moser), On cliques in graphs. *Israel J. Math.* **3** (1965), 23~28. [29]

See also [BHM1], [BM1], and p. 97.

Morgenstern, O. See [NM1].

Moser, L. See [HM2] and [MM1].

Motzkin, T. S.

[MS1] (with E. G. Straus), Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 533~540. [21]

Mowshowitz, A.

[M17] The group of a graph whose adjacency matrix has all distinct eigenvalues. *Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary, ed.) Academic Press, New York, 1969. [184]

See also [HMR1].

Mukhopadhyay, A.

[M18] The square root of a graph. *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 290~295. [28]

Mycielski, J.

[M19] Sur le coloriage des graphes. *Colloq. Math.* **3** (1955), 161~162. [148]

Nash-Williams, C. St. J. A.

[N1] On orientations, connectivity and odd-vertex pairings in finite graphs. *Canad. J. Math.* **12** (1960), 555~567. [254]

[N2] Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.* **36** (1961), 445~450. [105]

[N3] Infinite graphs—a survey. *J. Combinatorial Theory* **3** (1967), 286~301. [18]

See also [HN1].

von Neumann, J.

* [NM1] (with O. Morgenstern), *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944. [225]

Nordhaus, E. A.

[NG1] (with J. W. Gaddum), On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 175~177. [148]

See also [BCN1].

Norman, R. Z.

[NR1] (with M. Rabin), Algorithm for a minimal cover of a graph. *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 315~319. [112]

See also [FNU1], [HN2], [HN3], [HN4], and [HNC1].

Obershelp, W.
[O1] Kombinatorische Anzahlbestimmungen in Relationen. *Math. Ann.* **174** (1967), 53~78. [259]

Ore, O.
[O2] A problem regarding the tracing of graphs. *Elemente der Math.* **6** (1951), 49~53. [81]
[O3] Note on Hamilton circuits. *Amer. Math. Monthly* **67** (1960), 55. [79]
[O4] Arc coverings of graphs. *Ann. Mat. Pura Appl.* **55** (1961), 315~322. [82]
* [O5] *Theory of Graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38, Providence, 1962. [25,72,83,147]
[O6] Hamilton connected graphs. *J. Math. Pures Appl.* **42** (1963), 21~27. [82]
* [O7] *The Four Color Problem*. Academic Press, New York, 1967. [154,155]
[OS1] (with G. J. Stemple), Numerical methods in the four color problem. *Recent Progress in Combinatorics* (W. T. Tutte, ed.) Academic Press, New York, 1969. [6,152]

Otter, R.
[O8] The number of trees. *Ann. of Math.* **49** (1948), 583~599. [219,225,228]

Palmer, E. M.
[P1] Prime line-graphs. *Elem. Math.* (to appear). [202]
[PR1] (with R. W. Robinson). The matrix group of two permutation groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 204~207. [226]
See also [HP1], [HP2], [HP3], [HP4], [HP5], [HP6], [HP7], [HP8], [HP9], [HP10], [HP11], [HP12], [HP13], [HP14], [HP15], [HP16], [HP17], [HPR1], and p. 242.

Parthasarathy, K. R.
[P2] Enumeration of ordinary graphs with given partition. *Canad. J. Math.* **20** (1968), 40~47. [226]

Penney, W. F. See [AFPR1].

Perfect, H. See [MP1].

Petersen, J.
[P3] Die Theorie der regulären Graphen. *Acta Math.* **15** (1891), 193~220. [104]

Pippert, R. E. See [BP1].

Plummer, M. D.
[P4] On line-critical blocks. *Trans Amer. Math. Soc.* [37]
See also [BHP1], [BP2], [HP18], [HP19], and p. 65, 80 and 117.

Pólya, G.
[P5] Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. *Acta Math.* **68** (1937), 145~254. [188,

204,205,208,210,217,219,225]

[P6] Sur les types des propositions composées. *J. Symb. Logic* **5** (1940), 98~103. See also p. 226. [189]

Pósa, L.

[P7] A theorem concerning hamilton lines. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.* **7** (1962), 225~226. [77]

See also [EGP1].

Powell, M. G. See [WP1].

Prins, G.

[P8] The automorphism group of a tree. Doctoral dissertation, University of Michigan, 1957. [226,265]

See also [HHP1], [HP20], [HP21], [HP22], and [HPT1].

Pultr, A. See [HP23] and [HP24].

Quintas, L. V. See [GQ1].

Rabin, M. See [NR1].

Rademacher, H. See [SR2].

Radjavi, H. See [BR1].

Rado, R.

[R1] Note on the transfinite case of Hall's theorem on representatives. *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 321~324. [63]

Ramsey, F. P.

[R2] On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.* **30** (1930), 264~286. [18]

Read, R. C.

[R3] The enumeration of locally restricted graphs. I and II. *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 417~436; **35** (1960), 344~351. [226]

[R4] A note on the number of functional digraphs. *Math. Ann.* **143** (1961), 109~110. [227]

[R5] On the number of self-complementary graphs and digraphs. *J. London Math. Soc.* **38** (1963), 99~104. [222,226,227,229]

[R6] An introduction to chromatic polynomials. *J. Combinatorial Theory* **4** (1968), 52~71. [168,170]

See also [HPR1], [HR1], and p. 184 and 244.

Rédei, L.

[R7] Ein kombinatorischer Satz. *Acta Litt. Szeged* **7** (1934), 39~43. [239]

Redfield, J. H.

[R8] The theory of group-reduced distributions. *Amer. J. Math.* **49** (1927), 433~455. [206]

Reed, M. See [SR1].

Rényi, A. See [ER1].

Richardson, M.

[R9] On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 113~116. [235]

Riddell, R. J.

[RU1] (with G. E. Uhlenbeck), On the theory of the virial development of the equation of state of monoatomic gases. *J. Chem. Physics* **21** (1953), 2056~2064. [226]

Ringel, G.

*[R10] *Farbungsprobleme auf Flachen und Graphen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962. [137]

[R11] Selbstkomplementäre Graphen. *Arch. Math.* **14** (1963), 354~358. [29]

[R12] Das Geschlecht des vollständiger paaren Graphen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **28** (1965), 139~150. [158]

[R13] Über drei kombinatorische Probleme am *n*-dimensionalen Würfel und Würfelgitter. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1955), 10~19. [138]

[RY1] (with J. W. T. Youngs), Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **60** (1968), 438~445. [137]

[RY2] (with J. W. T. Youngs), Remarks on the Heawood conjecture. *Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary, ed.) Academic Press, New York, 1969. [137]

See also p. 144.

Riordan, J.

[R14] The number of labelled colored and chromatic trees. *Acta Math.* **97** (1957), 211~225. [221,226]

* [R15] *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Wiley, New York, 1958. [167,228,247,265]

[R16] The enumeration of trees by height and diameter. *IBM J. Res. Develop.* **4** (1960), 473~478. [225]

See also [AFPR1], [CR1], [GR1], and [HMR1].

Robbins, H. E.

[R17] A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control. *Amer. Math. Monthly* **46** (1939), 281~283. [245]

See also [CR1].

Robertson, N.

[R18] The smallest graph of girth 5 and valency 4. *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 824~825. [208]

See also p. 86.

Robinson, R. W.

[R19] Enumeration of colored graphs. *J. Combinatorial Theory* **4** (1968), 181~190. [226]

See also [HHR1], [PR1], and p. 82.

van Rooij, A.

[RW1] (with H. Wilf), The interchange graphs of a finite graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16** (1965), 263~269. [86]

Ross, I. C. See [HR2].

Rossi, P. See [GHR1].

Rota, G.-C.

[R20] On the foundations of combinatorial theory, I: Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **2** (1964), 340～368. [169]

Ryser, H. J.

[R21] Matrices of zeros and ones. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 442～464. [243]

Saaty, T. See p. 142.

Sabidussi, G.

[S1] Loewy-groupoids related to linear graphs. *Amer. J. Math.* **76** (1954), 447～487. [188]

[S2] Graphs with given group and given graph-theoretical properties. *Canad. J. Math.* **9** (1957), 515～525. [197,202]

[S3] On the minimum order of graphs with given automorphism group. *Monatsh. Math.* **63** (1959), 124～127. [202]

[S4] The composition of graphs. *Duke Math. J.* **26** (1959), 693～696. [193]

[S5] Graph multiplication. *Math. Z.* **72** (1960), 446～457. [25,192]

[S6] The lexicographic product of graphs. *Duke Math. J.* **28** (1961), 573～578. [25]

[S7] Graph derivatives. *Math. Z.* **76** (1961), 385～401. [83]

Sachs, H.

[S8] Über selbstkomplementäre Graphen. *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 270～288. [29]

[S9] Regular graphs with given girth and restricted circuits. *J. London Math. Soc.* **38** (1963), 423～429. [108]

See also [FS1].

Schuster, S. See [DS1].

Sedláček, J.

[S10] Some properties of interchange graphs. *Theory of Graphs and its Applications* (M. Fiedler, ed.) Prague, 1962; Reprinted, Academic Press, New York, 1962, pp. 145～150. [143]

Senior, J. K.

[S11] Partitions and their representative graphs. *Amer. J. Math.* **73** (1951), 663～689. [74]

Seshu, S.

* [SR1] (with M. Reed), *Linear Graphs and Electrical Networks*. Addison-Wesley, Reading, 1961. [83]

Shannon, C. E. See [EFS1].

Shrikhande, S. S.

[S12] On a characterization of the triangular association scheme. *Ann. Math. Statist.* **30** (1959), 39～47. [92]

Singleton, R. R.

[S13] There is no irregular Moore graph. *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 42～43. [28]
See also [HS1].

Slepian, D.
[S14] On the number of symmetry types of Boolean functions of n variables. *Canad. J. Math.* **5** (1953), 185～193. [227]

Smith, B. B. See [KS1].

Smith, C. A. B.
[ST1] (with W. T. Tutte), On unicursal paths in a network of degree 4. *Amer. Math. Monthly* **48** (1941), 233～237. [227,237]
See [BSST1] and p. 79 and 142.

Stein, S. K.
[S15] Convex maps. *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 464～466. [123]

Steinitz, E.
* [SR2] (with H. Rademacher), *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*. Springer, Berlin, 1934. [123]

Stemple, G. J. See [CS1].

Stewart, M. J. See [CS1].

Stone, A. H. See [BSST1] and p. 142.

Straus, E. G. See [MS1].

Sylvester, J. J. See p. 1, 4 and 41.

Szekeres, G.
[SW1] (with H. S. Wilf), An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Combinatorial Theory* **4** (1968), 1～3. [146]
See also [ES1].

Szele, T.
[S16] Kombinatorische Untersuchungen über den gerichteten vollständigen graphen. *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943), 223～256. [240]

Tait, P. G.
[T1] Remarks on the colouring of maps. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **10** (1880), 729. [79]

Tang, D. T.
[T2] Bi-path networks and multicommodity flows. *IEEE Trans. Circuit Theory* **11** (1964), 468～474. [144]

Teh, H. H.
[TY1] (with H. D. Yap), Some construction problems of homogeneous graphs. *Bull. Math. Soc. Nanyang Univ.* (1964), 164～196. [25]

Trauth, C. A., Jr. See [HT1] and [HT2].

Turán, P.
[T3] Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941), 436～452. [19,21,29]

Turner, J.
[T4] Point-symmetric graphs with a prime number of points. *J. Combinatorial Theory* **3** (1967), 136～145. [203]

[T5] A bibliography of graph theory. *Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary, ed.) Academic Press, New York, 1969. [268]

Tutte, W. T.

[T6] On Hamilton circuits. *J. London Math. Soc.* **21** (1946), 98～101. [79,142]

[T7] The factorizations of linear graphs. *J. London Math. Soc.* **22** (1947), 107～111. [100,107]

[T8] A family of cubical graphs. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **43** (1947), 459～474. [201]

[T9] The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **44** (1948), 463～482. [236]

[T10] The factors of graphs. *Canad. J. Math.* **4** (1952), 314. [102]

[T11] A short proof of the factor theorem for finite graphs. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 347～352. [102]

[T12] An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 905～917. [182]

[T13] A theory of 3-connected graphs. *Indag. Math.* **23** (1961), 441～455. [54]

[T14] A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.* **14** (1962), 21～38. [227]

[T15] A new branch of enumerative graph theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 500～504. [224]

[T16] On the non-biplanar character of the complete 9-graph. *Canad. Math. Bull.* **6** (1963), 319～330. [125]

[T17] How to draw a graph. *Proc. London Math. Soc.* **13** (1963), 743～767. [130]

[T18] The number of planted plane trees with a given partition. *Amer. Math. Monthly* **71** (1964), 272～277. [225]

[T19] Lectures on matroids. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* Sect. **B 69** (1965), 1～47. [48,182]

* [T20] *The Connectivity of Graphs.* Toronto Univ. Press, Toronto, 1967. [200,204]

See also [BSST1], [HKT1], [HPT1], [HT3], [HT4], [ST1], and p. 142 and 148.

Uhlenbeck, G. E.

[U1] Successive approximation methods in classical statistical mechanics. *Physica* **26** (1960), 17～27. [7]

See also [FNU1], [HU1], and [RU1].

Ulam, S. M.

* [U2] *A Collection of Mathematical Problems.* Wiley (Interscience), New York, 1960. [14]

Vajda, S.

* [V1] *Mathematical Programming.* Addison-Wesley, Reading, 1961. [7]

Varga, R. S.

* [V2] *Matrix Iterative Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962. [7]

Veblen, O.

[V3] *Analysis Situs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. **5**, Cambridge, 1922. Second edition, New York, 1931. [7]

Vizing, V. G.

[V4] On an estimate of the chromatic class of a p-graph (Russian) *Diskret. Analiz.* **3** (1964), 25～30. [154]

[V5] On the number of edges in a graph with given radius (Russian) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **173** (1967), 1245～1246. [50]

Vollmerhaus, H.

[V6] Über die Einbettung von Graphen in zweidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten kleinsten Geschlechts. *Beitrage zür Graphentheorie* (H. Sachs, H. Voss, and H. Walther, eds.) Teubner, Leipzig, 1968, pp. 163～168. [135]

Wagner, K.

[W1] Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **46** (1936), 26～32. [123]

[W2] Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.* **114** (1937), 570～590. [131]

[W3] Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-Vermutung. *Math. Ann.* **153** (1964), 139～141. [156]

Walther, H.

[W4] On intersections of paths in a graph. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [28]

Watkins, M. E.

[W5] A lower bound for the number of vertices of a graph. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 297. [66]

Weichsel, P. M.

[W6] The Kronecker product of graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1963), 47～52. [25]

Weinberg, L.

[W7] Number of trees in a graph. *Proc. IRE* **46** (1958), 1954～1955. [228]

[W8] On the maximum order of the automorphism group of a planar triply connected graph. *SIAM J.* **14** (1966), 729～738. [204]

Welsh, D. J. A.

[W9] Euler and bipartite matroids. *J. Combinatorial Theory* (to appear). [184]

[WP1] (with M. B. Powell), An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. *Computer J.* **10** (1967), 85～87. [170]
See also p. 171.

Whitney, H.

[W10] The coloring of graphs. *Ann. Math. (2)* **33** (1932), 688～718. [169]

[W11] Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.* **54** (1932), 150～168. [51,58,83,84,123,204]

[W12] Non-separable and planar graphs. *Trans Amer. Math. Soc.* **34** (1932), 339～362. [122,131,142]

[W13] A set of topological invariants for graphs. *Amer. J. Math.* **55** (1933), 231～235. [123]

[W14] Planar graphs. *Fund. Math.* **21** (1933), 73～84. [131]

[W15] On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math.* **57** (1935), 509～533. [47]

[W16] A theorem on graphs. *Annals Math.* **32** (1931), 378～390. [153]

Wielandt, H.

[W17] Unzerlegbare, nichtnegative Matrizen. *Math. Z.* **52** (1950), 642～648. [245]

Wilcox, G. See [HW1].

Wilf, H. S. See [RW1] and [SW1].

Yackel, J. See [GY1].

Yang, C. N. See [LY1].

Yap, H. D. See [TY1].

Youngs, J. W. T.

[Y1] The Heawood map colouring conjecture. Chapter 12 in *Graph Theory and Theoretical Physics* (F. Harary, ed.) Academic Press, London, 1967, pp. 313～354. [137]

See also [BHKY1], [RY1], and [RY2].

Zykov, A. A.

[Z1] On some properties of linear complexes. (Russian) *Mat. Sbornik* **24** (1949), 163～188. *Amer. Math. Soc. Translation* N. 79, 1952. [24,148,163]